# Abélianité d'une catégorie de foncteur à image dans une catégorie abélienne

**Théorème.** *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie essentiellement petite et $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, alors la catégorie des foncteurs de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{A}$ notée $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est une catégorie abélienne.*

On rappelle synthétiquement les définitions de catégorie abélienne, pré-abélienne, additive et pré-additive grâce au diagramme suivant :

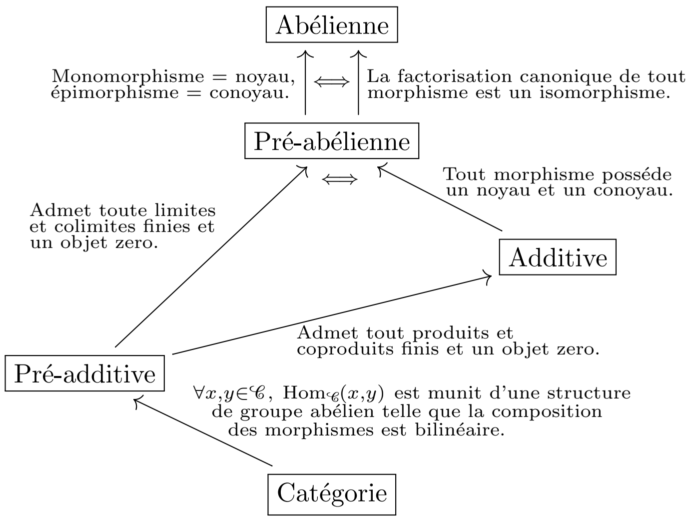


Figure 1 – Définition d'une catégorie abélienne.

Due aux différentes définitions équivalentes nous avons plusieurs choix possibles pour montrer ce résultat. Dans tout les cas on remarquera que la structure abélienne sur $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ s'hérite de la structure abélienne sur les évaluations des foncteurs (par exemple pour $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$, $F \oplus G \coloneqq c \mapsto F(c) \oplus G(c)$). Ainsi il sera facile de montrer par exemple que la factorisation canonique d'un morphisme $\eta$ dans $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ (une transformations naturelles) est un isomorphisme car sur chaque composante $c \in \mathscr{C}$ il correspondra exactement par construction à la factorisation canonique $\tilde{\eta}_c$ du morphisme $\eta_c$ dans $\mathscr{A}$.

Le plus important est donc de montrer que la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est pré-abélienne, c'est à dire qu'elle admet toute limites et colimites finies. Pour montrer ceci nous avons le choix, on pourrait montrer que $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ possède tout produits finis, coproduits finis, noyau et conoyau. Dans ce cas on remarque assez vite que les arguments utilisé pour montrer l'existence de chacun de ces objets sont redondants et consistent systématiquement à utiliser la propriété universelle limite d'un diagramme particulier. Nous choisissons ici de montrer que $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est pré-additive et qu'elle possède toute limites et colimites finies en posant pour tout diagramme $L : J \to [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$, un foncteur $\lim(L) \coloneqq c \in \mathscr{C} \mapsto \lim(L_c) \in \mathscr{A}$ où $L_c : j \in J \mapsto L(j)(c) \in \mathscr{A}$.

On va montrer directement qu'une limite dans $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ n'est rien d'autre qu'une "collection" de limite dans $\mathscr{A}$.

**Lemme 1.** *Si $\mathscr{C}$ est une catégorie essentiellement petite et $\mathscr{D}$ localement petite, alors la catégorie de foncteur $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ est localement petite.*

*Démonstration.* Si $\mathscr{C}$ est essentiellement petite il existe $\mathscr{C}'$ petite et $L : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ et $R : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ des foncteurs qui forment une équivalence de catégorie entre $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}$. On montre facilement que $\Phi : F \in [\mathscr{C}', \mathscr{D}] \mapsto F \circ R \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ et $\Psi : F \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}] \mapsto F \circ L \in [\mathscr{C}', \mathscr{D}]$ forment une équivalence de catégorie entre $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ et $[\mathscr{C}', \mathscr{D}]$. On obtient alors que pour tout $F, G \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ :

$$\mathrm{Hom}_{[\mathscr{C},\mathscr{D}]}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{[\mathscr{C}',\mathscr{D}]}(F \circ L, G \circ L) \subseteq \prod_{X \in \mathscr{C}'} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F \circ L(X), G \circ L(X)).$$

Le produit à droite est un ensemble donc $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ est localement petite. □

**Lemme 2.** *La catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est pré-additive.*

*Démonstration.* Soit $F, G \in [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$, et $\eta, \varepsilon : F \Rightarrow G$ deux transformations naturelles entre les foncteurs $F$ et $G$. Pour tout $c \in \mathscr{C}$, les morphismes $\eta_c$ et $\varepsilon_c$ appartiennent à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F(c), G(c))$ qui est munit d'une structure de groupe abélien que l'on note $+$. Ceci nous amène à poser tout simplement pour $\eta, \varepsilon \in \mathrm{Hom}_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]}(F, G)$ la transformation naturelle $\eta + \varepsilon$ définie composante par composante par $(\eta + \varepsilon)_c := \eta_c + \varepsilon_c$. Il est clair que cela munit bien $\mathrm{Hom}_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]}(F, G)$ d'une structure de groupe abélien et que la composition est bien bilinéaire par rapport à $+$ puisque cela se vérifie composante par composante. □

**Lemme 3.** *La catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ possède un objet zero.*

*Démonstration.* La catégorie $\mathscr{A}$ étant abélienne, elle possède un objet zero que l'on note $0_{\mathscr{A}}$. On définit le foncteur zero $0_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]} \in [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ par tel que pour tout $c \in \mathscr{C}$, $0_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]}(c) = 0_{\mathscr{A}}$ et pour tout $f : c \to d$, $0_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]}(f) = 0 : 0_{\mathscr{A}} \to 0_{\mathscr{A}}$ (l'unique morphisme de $0_{\mathscr{A}}$ vers $0_{\mathscr{A}}$).

Soit $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ et $\eta : F \Rightarrow 0_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]}$, alors pour tout $c \in \mathscr{C}$ on a $\eta_c : F(c) \to 0_{\mathscr{A}}$ donc $\eta_c = 0$ par unicité du morphisme nul. $\eta$ est donc la transformation naturelle dont chaque composante est le morphisme nul. De même pour $\varepsilon : 0_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]} \Rightarrow F$ qui ne peut être que la transformation naturelle nulle sur chaque composante. Ceci fait de $0_{[\mathscr{C},\mathscr{A}]}$ un objet zero dans $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$. □

**Lemme 4.** *La catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ possède toute limites et colimites finies.*

*Démonstration.* Nous montrons seulement que $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ admet toute les limites finies. Par des arguments duaux $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ admet toutes les colimites finies.

Soit $J$ un diagramme, et $L : J \to [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ un foncteur, on cherche à définir $\lim(L)$ un foncteur de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{A}$ et pour tout $k : i \to j$ des transformation naturelles $\mu^i : \lim(L) \Rightarrow L(i)$ et $\mu^j : \lim(L) \Rightarrow L(j)$ tels que $L(k) \circ \mu^i = \mu^j$, le tout vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tel que pour tout $k : i \to j$ dans $J$ il existe $\lambda^i : F \Rightarrow L(i)$ et $\lambda^j : F \Rightarrow L(j)$ avec $L(k) \circ \lambda^i = \lambda^j$ il existe une unique transformation naturelle $\alpha : F \Rightarrow \lim(L)$ tel que $\lambda^i = \mu^i \circ \alpha$ et $\lambda^j = \mu^j \circ \alpha$.

Pour parler plus généralement, il s'agit en fait de trouver un foncteur $\lim(L)$ et une transformation naturelle $\mu : C_{\lim(L)} \Rightarrow L$ où $C_{\lim(L)} : J \to [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$, $\forall i \in J$, $C_{\lim(L)}(i) = \lim(L)$ est le foncteur constant (cône au dessus de $L$ de sommet $\lim(L)$) tel que pour tout autre cône $\lambda : C_F \Rightarrow L$, il existe $\alpha : \lim(L) \Rightarrow L$ avec $\lambda = \mu \circ \tilde{\alpha}$ (où $\tilde{\alpha} : C_F \to C_F$ est la transformation naturelle évidente induite par $\alpha$).

Mais parlons plutôt diagramme commutatif, on cherche $\lim(L)$ et $\mu$ tels que le diagramme de gauche commute vérifiant la propriété suivante : pour tout $F$ et $\lambda$ tels que le diagramme central commute, il existe une unique $\alpha : F \Rightarrow \lim(L)$ telle que le diagramme de droite commute.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\forall k"'] \\ j \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & \lim(L) \arrow[dl, Rightarrow, "\mu^i"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\mu^j"] & \\ L(i) \arrow[rr, Rightarrow, "L(k)"'] & & L(j) \end{tikzcd} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} i \arrow[d, "\forall k"'] \\ j \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & F \arrow[dl, Rightarrow, "\lambda^i"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\lambda^j"] & \\ L(i) \arrow[rr, Rightarrow, "L(k)"'] & & L(j) \end{tikzcd} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} i \arrow[d, "\forall k"'] \\ j \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & F \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[ddl, Rightarrow, bend right, "\lambda^i"'] \arrow[ddr, Rightarrow, bend left, "\lambda^j"] & \\ & \lim(L) \arrow[dl, Rightarrow, "\mu^i"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\mu^j"] & \\ L(i) \arrow[rr, Rightarrow, "L(k)"'] & & L(j) \end{tikzcd} \tag{U1}$$

Supposons qu'il existe un tel foncteur $\lim(L)$ et une telle transformation naturelle $\mu : C_{\lim(L)} \Rightarrow L$, alors pour tout $F$ et $\lambda : C_F \Rightarrow L$ on a en particulier que pour tout $c \in \mathscr{C}$ il existe $\alpha_c$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & F(c) \arrow[d, "\alpha_c"] \arrow[ddl, bend right, "\lambda^i_c"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda^j_c"] & \\ & \lim(L)(c) \arrow[dl, "\mu^i_c"'] \arrow[dr, "\mu^j_c"] & \\ L(i)(c) \arrow[rr, "L(k)_c"'] & & L(j)(c) \end{tikzcd}$$

On voit ainsi que pour tout $c \in \mathscr{C}$, $\lim(L)(c)$ vérifie une propriété qui s'apparente à la propriété universelle de la limite du foncteur $L_c : J \to \mathscr{A}$ définie par $L_c(i) = L(i)(c)$ et pour tout morphisme $k : i \to j$, $L_c(k) = L(k)_c$. La catégorie $\mathscr{A}$ étant abélienne il existe un objet $\lim(L_c)$ et pour tout $k : i \to j$ des morphismes $u^i_c$ et $u^j_c$ tels que $u^j_c = L(k)_c \circ u^i_c : \lim(L_c) \to L_c(j) = L(j)(c)$,

$$\begin{tikzcd} & \lim(L_c) \arrow[dl, "u^i_c"'] \arrow[dr, "u^j_c"] & \\ L(i)(c) \arrow[rr, "L(k)"'] & & L(j)(c) \end{tikzcd}$$

qui vérifient la propriété universelle suivante : Si il existe $d \in \mathscr{C}$ et pour tout $k : i \to j$ des morphismes $v$ et $w$ tels que si le diagramme de gauche ci-dessous commute pour tout $k : i \to j$, alors il existe un unique morphisme $a_c$ tel que le diagramme de droite ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "w"] & \\ L(i)(c) \arrow[rr, "L(k)"'] & & L(j)(c) \end{tikzcd} \quad \Bigg| \quad \begin{tikzcd} & d \arrow[d, "a_c"] \arrow[ddl, bend right, "v"'] \arrow[ddr, bend left, "w"] & \\ & \lim(L_c) \arrow[dl, "u^i_c"'] \arrow[dr, "u^j_c"] & \\ L(i)(c) \arrow[rr, "L(k)_c"'] & & L(j)(c) \end{tikzcd} \tag{U2}$$

Ceci nous donne les idées pour construire le foncteur $\lim(L)$ et les transformations naturelles $\mu^i$ et $\mu^j$. Suivons cette intuition et posons $\mu^i = \{u_c^i\}_{c\in\mathscr{C}}$ où les $u_c^i$ sont les morphismes décrit au-dessus. Posons aussi $\lim(L) : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tel que $\lim(L)(c) = \lim(L_c)$. Soit maintenant $f : c \to d$ un morphisme dans $\mathscr{C}$, pour que $\lim(L)$ soit un foncteur il nous faut définir $\lim(L)(f) : \lim(L_c) \to \lim(L_d)$ et ce de façon la plus naturelle possible. Remarquons que comme pour tout $i \in J$, $L(i)$ est un foncteur on dispose de $L(i)(f) : L(i)(c) \to L(i)(d)$ et de $L(j)(f) : L(j)(c) \to L(j)(d)$. En fait on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \lim(L_c) \arrow[rrr, dashed, "?"] \arrow[dl, "u_c^i"'] \arrow[ddr, "u_c^j"] & & & \lim(L_d) \arrow[dl, "u_d^i"'] \arrow[ddr, "u_d^j"] & \\
L(i)(c) \arrow[rrr, "L(i)(f)"] \arrow[drr, "L(k)_c"'] & & & L(i)(d) \arrow[drr, "L(k)_d"] & & \\
 & & L(j)(c) \arrow[rrr, "L(j)(f)"'] & & & L(j)(d)
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif puisque les triangles verticaux le sont par définition et que la commutativité du socle provient directement du fait que $L(k)$ soit une transformation naturelle entre $L(i)$ et $L(j)$. En particulier on a deux morphismes $L(j)(f) \circ u_c^j$ et $L(i)(f) \circ u_c^i$ tels que :

$$L(k)_d \circ L(i)(f) \circ u_c^i = L(j)(f) \circ u_c^j.$$

Par la propriété universelle de la limite $\lim(L_d)$ il existe un unique morphisme $\varphi_f : \lim(L_c) \to \lim(L_d)$ qui garde ce diagramme commutatif. C'est à dire tel que

$$L(j)(f) \circ u_c^j = u_d^j \circ \varphi_f \quad \text{et} \quad L(i)(f) \circ u_c^i = u_d^i \circ \varphi_f \tag{E1}$$

On pose donc pour $f : c \to d$, $\lim(L)(f) \coloneqq \varphi_f$. Et l'unicité de ce morphisme $\varphi_f$ nous permet de montrer facilement que $\lim(L)$ est bien un foncteur. En effet l'image du morphisme identité sur $id_i : i \to i$ est clairement l'identité sur $\lim(L_c)$ puisque ce morphisme fait commuter trivialement le diagramme. Et l'image d'une composée $g \circ f$ est bien la composé des images, car $\lim(L)(g \circ f)$ est par construction l'unique morphisme tel que pour tout $k : i \to j$ :

$$u_e^i \circ \lim(L)(g \circ f) = L(i)(g \circ f) \circ u_c^i \quad \text{et} \quad u_e^j \circ \lim(L)(g \circ f) = L(j)(g \circ f) \circ u_c^j.$$

Par le diagramme commutatif suivant, et le fait que $L(i)$ et $L(j)$ soit des foncteurs on obtient :

$$\begin{cases} u_e^i \circ \lim(F)(g) \circ \lim(F)(f) = L(i)(g) \circ L(i)(f) \circ u_c^i = L(i)(g \circ f) \circ u_c^i \\ u_e^j \circ \lim(F)(g) \circ \lim(F)(f) = L(j)(g) \circ L(j)(f) \circ u_c^j = L(j)(g \circ f) \circ u_c^j \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \lim(L_c) \arrow[rrrrrr, bend left, "\lim(L)(g\circ f)"] \arrow[rrr, "\lim(L)(f)"'] \arrow[dl, "u_c^i"'] \arrow[ddr, "u_c^j"] & & & \lim(L_d) \arrow[rrr, "\lim(L)(g)"'] \arrow[dl] \arrow[ddr] & & & \lim(L_e) \arrow[dl, "u_e^i"'] \arrow[ddr, "u_e^j"] & \\
L(i)(c) \arrow[rrr, "L(i)(f)"'] \arrow[drr] & & & L(i)(d) \arrow[rrr, "L(i)(g)"'] \arrow[drr] & & & L(i)(e) \arrow[drr] & & \\
 & & L(j)(c) \arrow[rrr, "L(j)(f)"'] & & & L(j)(d) \arrow[rrr, "L(j)(g)"'] & & & L(j)(e)
\end{tikzcd}$$

Donc $\lim(L)(f \circ g)$ et $\lim(F)(f) \circ \lim(F)(g)$ vérifie la même propriété universelle donc sont égaux. Tout ceci nous montre que $\lim(F)$ est bien un foncteur. De plus par la relation (E1) on a : $L(j)(f) \circ u^j_c = u^j_d \circ \lim(L)(f)$ et $L(i)(f) \circ u^i_c = u^i_d \circ \lim(L)(f)$, ce qui nous dit exactement que à $i$ fixé $\mu^i = \{u^i_c\}_{c \in cs}$ est une transformation naturelle entre $\lim(L)$ et $L(i)$.

Pour résumer, on a construit un foncteur $\lim(L) : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ et pour tout $k : i \to j$ des transformations naturelles $\mu^i$ et $\mu^j$ telles que :

$$\forall c \in \mathscr{C}, \quad \begin{tikzcd} & \lim(L)(c) \arrow[dl, "\mu^i_c"'] \arrow[dr, "\mu^j_c"] & \\ L(i)(c) \arrow[rr, "L(k)_c"'] & & L(j)(c) \end{tikzcd} \quad \text{donc telles que :} \quad \begin{tikzcd} & \lim(L) \arrow[dl, Rightarrow, "\mu^i"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\mu^j"] & \\ L(i) \arrow[rr, Rightarrow, "L(k)"'] & & L(j) \end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que ce foncteur vérifie bien la propriété universelle (U1) de la limite de $L$. Prenons un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ et $\lambda : C_F \Rightarrow L$ tel que le diagramme de gauche ci dessous commute et montrons qu'il existe une unique $\alpha : \lim(F) \Rightarrow F$ telle que le diagramme (D1) de droite ci dessous commute :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\forall k"'] \\ j \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & F \arrow[dl, Rightarrow, "\lambda^i"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\lambda^j"] & \\ L(i) \arrow[rr, Rightarrow, "L(k)"'] & & L(j) \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[d, "\forall k"'] \\ j \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & F \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[ddl, Rightarrow, bend right, "\lambda^i"'] \arrow[ddr, Rightarrow, bend left, "\lambda^j"] & \\ & \lim(L) \arrow[dl, Rightarrow, "\mu^i"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\mu^j"] & \\ L(i) \arrow[rr, Rightarrow, "L(k)"'] & & L(j) \end{tikzcd} \tag{D1}$$

Ponctuellement pour tout $c \in \mathscr{C}$, on a le diagramme suivant qui commute :

$$\begin{tikzcd} & F(c) \arrow[d, dashed, "?"'] \arrow[ddl, bend right, "\lambda^i_c"'] \arrow[ddr, bend left, "\lambda^j_c"] & \\ & \lim(L)(c) \arrow[dl, "\mu^i_c"'] \arrow[dr, "\mu^j_c"] & \\ L(i)(c) \arrow[rr, "L(k)_c"'] & & L(j)(c) \end{tikzcd}$$

Par définition $\lim(L)(c) = \lim(L_c)$ et $\mu^i_c = u^i_c$, $\mu^j_c = u^j_c$, la propriété universelle (U2) de $\lim(L_c)$ nous donne l'existence d'un unique morphisme $a_{F(c)} : F(c) \to \lim(L)(c)$ tel que le diagramme du dessus reste commutatif. Ce morphisme $a_{F(c)}$ est le candidat idéal pour la composante de $\alpha$ en $c$, on pose alors $\alpha_c = a_{F(c)}$. Il nous reste à montrer que ainsi définie $\alpha$ est bien une transformation naturelle entre $F$ et $\lim(L)$, et qu'elle est unique sous les conditions de commutativité des diagrammes dans (U1). Pour montrer que $\alpha$ est bien une transformation naturelle il faut vérifier que pour tout $f : c \to d$ le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
F(c) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_c"'] & F(d) \arrow[d, "\alpha_d"] \\
\lim(L)(c) \arrow[r, "\lim(L)(f)"'] & \lim(L)(d)
\end{tikzcd}
\tag{D2}
$$

Encore une fois on va s'en sortir grâce a la propriété universelle de la limite, on remarque premièrement que le carré commutatif précédent s'inclut dans le diagramme suivant qui a le bon goût d'être commutatif partout sauf en ce carré en bleu et fuchsia :

$$
\begin{tikzcd}
& F(c) \arrow[rrr, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_c"] \arrow[ddl, bend right, "\lambda_c^i"'] \arrow[dddr, bend left, "\lambda_c^j"] & & & F(d) \arrow[d, "\alpha_d"] \arrow[ddl, bend right, "\lambda_d^i"'] \arrow[dddr, bend left, "\lambda_d^j"] & \\
& \lim(L)(c) \arrow[rrr, "\lim(L)(f)"'] \arrow[dl, "\mu_c^i"'] \arrow[ddr, "\mu_c^j"] & & & \lim(L)(d) \arrow[dl, "\mu_d^i"'] \arrow[ddr, "\mu_c^j"] & \\
L(i)(c) \arrow[rrr, "L(i)(f)"'] \arrow[drr, "L(k)_c"'] & & & L(i)(d) \arrow[drr, "L(k)_d"] & & \\
& & L(j)(c) \arrow[rrr, "L(j)(f)"'] & & & L(j)(d)
\end{tikzcd}
\tag{D3}
$$

Remarquons que comme $L(k)_d \circ L(i)(f) \circ \lambda_c^i = L(j)(f) \circ L(k)_c \circ \lambda_c^i = L(j)(f) \circ \lambda_c^j$ le diagramme ci-dessous à gauche commute $k : i \to j$, donc par la propriété universelle de la limite $\lim(L_d)$, il existe un unique morphisme $\beta : F(c) \to \lim(L_d) = \lim(L)(d)$ tel que le diagramme (D4) ci-dessous à droite commute pour tout $k : i \to j$ :

$$
\begin{tikzcd}
& F(c) \arrow[dl, "L(i)(f)\circ\lambda_c^i"'] \arrow[dr, "L(j)(f)\circ\lambda_c^j"] & \\
L(i)(d) \arrow[rr, "L(k)_d"'] & & L(j)(d)
\end{tikzcd}
\qquad \bigg| \qquad
\begin{tikzcd}
& F(c) \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddl, bend right, "L(i)(f)\circ\lambda_c^i"'] \arrow[ddr, bend left, "L(j)(f)\circ\lambda_c^j"] & \\
& \lim(L)(d) \arrow[dl, "\mu_d^i"] \arrow[dr, "\mu_d^j"'] & \\
L(i)(d) \arrow[rr, "L(k)_d"'] & & L(j)(d)
\end{tikzcd}
\tag{D4}
$$

On va montrer les morphismes $\alpha_d \circ F(f)$ et $\lim(L)(f) \circ \alpha_c$ font eux aussi commuter le diagramme (D4) pour tout $k : i \to j$, par unicité ils seront alors égaux. Avec l'aide du gros diagramme (D3) on voit facilement :

$$\begin{cases} \mu_d^i \circ \alpha_d \circ F(f) = \lambda_d^i \circ F(f) = L(i)(f) \circ \lambda_c^i, \\ \mu_d^j \circ \alpha_d \circ F(f) = \lambda_d^j \circ F(f) = L(j)(f) \circ \lambda_c^j, \\ \\ \mu_d^i \circ \lim(F)(f) \circ \alpha_c = L(i)(f) \circ \mu_c^i \circ \alpha_c = L(i)(f) \circ \lambda_c^i, \\ \mu_d^j \circ \lim(F)(f) \circ \alpha_c = L(j)(f) \circ \mu_c^j \circ \alpha_c = L(j)(f) \circ \lambda_c^j. \end{cases}$$

Ceci montre bien que le diagramme (D2) commute, et ce pour tout $f : c \to d$, donc $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in \mathscr{C}}$ est bien une transformation naturelle entre $F$ et $\lim(L)$. Elle est de plus unique car si $\delta$ est une autre transformation naturelle qui garde la commutativité du diagramme (D1), alors sur chaque composante $\delta_c$ vérifie la propriété universelle (U2) entre $F(c)$ et $\lim(L)(c)$ donc est égale à $a_{F(c)} = \alpha_c$.

Le foncteur $\lim(L)$ que nous avons construit vérifie bien la propriété universelle de la limite du foncteur $L$, on a montré que pour tout diagramme $J$ et $L : J \to [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ il existe $\lim(L) \in [\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ qui est la limite de $L$. Donc la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ possède toute les limites finies. □

**Lemme 5.** *La catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est abélienne.*

*Démonstration.* Les lemmes précédents montrent que $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est une catégorie pré-abélienne. Remarquons premièrement que l'on dispose bien des foncteurs :

$$\mathrm{Ker}(\eta) : c \mapsto \mathrm{Ker}(\eta_c) \quad \mathrm{Coker}(\eta) : c \mapsto \mathrm{Coker}(\eta_c) \quad \mathrm{Im}(\eta) : c \mapsto \mathrm{Im}(\eta_c) \quad \mathrm{Coim}(\eta) : c \mapsto \mathrm{Coim}(\eta_c)$$

qui vérifient respectivement par le lemme 4 les propriétés universelles du noyau, du conoyau, de l'image et de la coimage de $\eta$. La catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ étant pré-abélienne on dispose d'une factorisation canonique $\tilde{\eta} : \mathrm{Coim}(\eta) \Rightarrow \mathrm{Im}(\eta)$ de $\eta$ telle que :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\eta) \arrow[r, Rightarrow, "i"] & F \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[d, Rightarrow, "p"'] & G \arrow[r, Rightarrow, "\pi"] & \mathrm{Coker}(\eta) \ . \\ & \mathrm{Coim}(\eta) \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{\eta}"'] & \mathrm{Im}(\eta) \arrow[u, Rightarrow, "j"'] & \end{tikzcd}$$

La construction de $\tilde{\eta}$ repose sur les propriétés universelles du noyau, conoyau, image et coimage, qui elles-même reposent uniquement sur les propriétés universelles de leurs évaluations qui sont par construction des noyaux, conoyaux, images et coimages. Si on détaille la construction de ce $\tilde{\eta}$, on va exactement choisir pour la composante $\tilde{\eta}_c$ l'isomorphisme $\overline{\eta}_c$ de la factorisation canonique du morphisme $\eta_c$ dans $\mathscr{A}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\eta_c) \arrow[r, "i_c"] & F(c) \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p_c"'] & G(c) \arrow[r, "\pi_c"] & \mathrm{Coker}(\eta_c) \\ & \mathrm{Coim}(\eta_c) \arrow[r, "\overline{\eta}_c"'] & \mathrm{Im}(\eta_c) \arrow[u, "j_c"'] & \end{tikzcd}$$

On a donc nécessairement $\tilde{\eta}_c = \overline{\eta}_c$ et on obtient ainsi que $\tilde{\eta}$ est un isomorphisme, ce qui montre que la catégorie $[\mathscr{C}, \mathscr{A}]$ est une catégorie abélienne. □

---

**Références :** Pour une références parlant de limites, cônes, colimites et cocônes voir le chapitre 3 du livre "Category Theory in Context" de Emily Riehl.