

## Algèbre linéaire : diagonalisation

Soit  $A$  une matrice dans  $M_n(\mathbb{R})$ , représentant un endomorphisme linéaire  $u : E \rightarrow E$ .

$\lambda$  est une **valeur propre** de  $A$  si il existe un vecteur  $X$  tel que  $AX = \lambda X$ , dans ce cas  $X$  est un **vecteur propre**. L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeurs propre  $\lambda$  forme le sous-espace propre noté  $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ .

On note  $\chi_A = \det(A - XI_n)$  le polynôme **caractéristique** de  $A$ , ses racines sont les valeurs propres de  $A$ . On note  $\mu_A$  le polynôme **minimal** de  $A$ . Le polynôme  $\mu_A$  est minimal parmi les polynômes annulateurs de  $A$ , c'est à dire tel que si  $P(A) = 0$  alors  $\mu_A \mid P$ .

Par le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_A(A) = 0$ , et on a alors  $\mu_A \mid \chi_A$ .

**Critère de diagonalisation :** Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est diagonalisable.
2. Il existe une matrice inversible  $P$  tel que  $PAP^{-1}$  soit une matrice diagonale.
3. Il existe une base de  $E$  formée des vecteurs propres de  $A$ .
4.  $E$  est la somme directe des sous-espaces propres de  $A$ .
5. La somme des dimensions des sous-espaces propres = la dimension de  $E$ .
6.  $\chi_A$  est scindé et la dimensions des sous-espace propre = la multiplicité des valeurs propres.
7. Il existe un polynôme  $P$  scindé à racine simple tel que  $P(A) = 0$ .
8. Le polynôme minimal de  $A$  est scindé à racine simple.

En particulier :

1. Si  $\chi_A$  est scindé à racine simple alors  $A$  est diagonalisable.
2. Si  $\chi_A$  possède  $n = \dim(E)$  racines distinctes alors  $A$  est diagonalisable.
3. Si  $A$  possède  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes alors  $A$  est diagonalisable.
4. Si  $A$  est diagonale alors  $A$  est diagonalisable.

**Remarques :**

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
2. Si  $A$  possède une unique valeurs propre  $\lambda$ , alors  $A$  est diagonalisable si seulement si  $A$  était déjà diagonale égale à  $\lambda I_n$ .
3. Pour toute valeurs propre  $\lambda$ ,  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq$  multiplicité de  $\lambda$ .
4.  $0$  est valeur propre  $\iff A$  n'est pas bijective.
5. Le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont les mêmes racines.