

Un pullback d'épimorphisme est un pushout

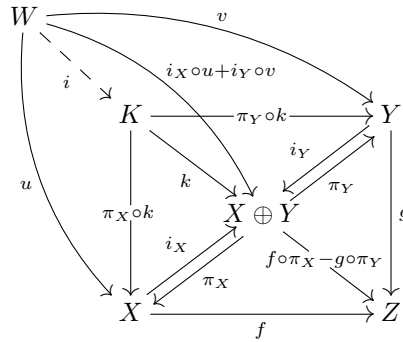
Lemme 1. Dans \mathcal{A} une catégorie abélienne, le carré commutatif suivant est un pullback si et seulement $(W, u, v) \simeq (K, \pi_X \circ k, \pi_Y \circ k)$ avec $(K, k) = \text{Ker}(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y)$:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{v} & Y \\ u \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Où π_X et π_Y sont les applications canoniques du bi-produit :

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{i_X} \\ \xleftarrow{\pi_X} \end{array} X \oplus Y \begin{array}{c} \xleftarrow{i_Y} \\ \xrightarrow{\pi_Y} \end{array} Y$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $(K, k) = \text{Ker}(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y)$ vérifie la propriété universelle du pullback de f et g . Notons déjà que comme $(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y) \circ k = 0$ on a $f \circ \pi_X \circ k = g \circ \pi_Y \circ k$. Donc le carré (K, Y, X, Z) est bien commutatif.



Supposons maintenant qu'il existe un objet W et des morphismes $u : W \rightarrow X$ et $v : W \rightarrow Y$ tels que $g \circ v = f \circ u$, alors

$$(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y) \circ (i_X \circ u + i_Y \circ v) = f \circ u - g \circ v = 0$$

donc il existe un unique morphisme $i : W \rightarrow K$ tel que :

$$k \circ i = i_X \circ u + i_Y \circ v.$$

On a immédiatement que $\pi_X \circ k \circ i = u$ et $\pi_Y \circ k \circ i = v$, donc K vérifie bien la propriété universelle du pullback. \square

Lemme 2. En reprenant les notations du lemme 1, si f est un épimorphisme alors $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$ est un épimorphisme.

Démonstration. Supposons que f soit un épimorphisme et qu'il existe a et b des morphismes tels que $a \circ (f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y) = b \circ (f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y)$, en composant par i_X à droite on obtient que $a \circ f = b \circ f$ donc que $a = b$. \square

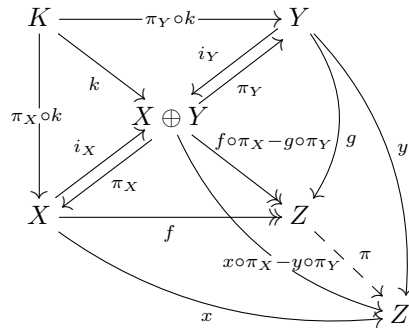
Lemme 3. Dans une catégorie abélienne, un épimorphisme est le conoyau de son noyau et un monomorphisme est le noyau de son conoyau.

Démonstration. Cela provient essentiellement du fait que la factorisation canonique dans une catégorie abélienne est un isomorphisme. \square

Proposition. Dans \mathcal{A} une catégorie abélienne, si le carré commutatif suivant est un pullback et que f est un épimorphisme alors le carré est aussi un pushout.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{v} & Y \\ u \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Démonstration. Par le lemme 1, et en reprenant les notations de sa démonstration on identifie W avec K le noyau de $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$, et les morphismes u et v avec les morphismes $\pi_X \circ k$ et $\pi_Y \circ k$. Par les lemmes 2 et 3, f étant un épimorphisme le morphisme $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$ est un épimorphisme et est le conoyau de son noyau k .



Soit Z' un objet de \mathcal{A} et $x : X \rightarrow Z'$, $y : Y \rightarrow Z'$ des morphismes tels que $x \circ \pi_X \circ k = y \circ \pi_Y \circ k$. On a alors que $(x \circ \pi_X - y \circ \pi_Y) \circ k = 0$ donc $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$ étant le conoyau de k , il existe $\pi : Z \rightarrow Z'$ tel que :

$$x \circ \pi_X - y \circ \pi_Y = \pi \circ (f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y).$$

En composant par i_X et par i_Y à droite on obtient respectivement que $x = \pi \circ f$ et $y = \pi \circ g$. Autrement dit, Z, f, g vérifient la propriété universelle du pushout. \square

Proposition. Dans \mathcal{A} une catégorie abélienne, si le carré commutatif suivant est un pushout et que f est un monomorphisme alors le carré est aussi un pullback.

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{v} & Y \\ u \uparrow & & \uparrow g \\ X & \xleftarrow{f} & Z \end{array}$$

Démonstration. Par dualité de la proposition précédente. \square