Un pullback d'épimorphisme est un pushout

Lemme 1. *Dans $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, le carré commutatif suivant est un pullback si et seulement $(W, u, v) \simeq (K, \pi_X \circ k, \pi_Y \circ k)$ avec $(K, k) = \mathrm{Ker}(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y)$:*

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Où π_X et π_Y sont les applications canoniques du bi-produit :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "i_X"] & X \oplus Y \arrow[l, shift left, "\pi_X"] \arrow[r, shift left, "\pi_Y"'] & Y \arrow[l, shift left, "i_Y"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $(K, k) = \mathrm{Ker}(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y)$ vérifie la propriété universelle du pullback de f et g. Notons déjà que comme $(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y) \circ k = 0$ on a $f \circ \pi_X \circ k = g \circ \pi_Y \circ k$. Donc le carré (K, Y, X, Z) est bien commutatif.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "i"'] \arrow[drrr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] \arrow[ddrr, bend left, "i_X \circ u + i_Y \circ v"] & & & \\
& K \arrow[rr, "\pi_Y \circ k"] \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "\pi_X \circ k"'] & & Y \arrow[dl, shift left, "i_Y"'] \arrow[dd, "g"] \\
& & X \oplus Y \arrow[ur, shift left, "\pi_Y"'] \arrow[dl, shift left, "\pi_X"] \arrow[dr, "f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y"] & \\
& X \arrow[ur, shift left, "i_X"] \arrow[rr, "f"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Supposons maintenant qu'il existe un objet W et des morphismes $u : W \to X$ et $v : W \to Y$ tels que $g \circ v = f \circ u$, alors

$$(f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y) \circ (i_X \circ u + i_Y \circ v) = f \circ u - g \circ v = 0$$

donc il existe un unique morphisme $i : W \to K$ tel que :

$$k \circ i = i_X \circ u + i_Y \circ v.$$

On a immédiatement que $\pi_X \circ k \circ i = u$ et $\pi_Y \circ k \circ i = v$, donc K vérifie bien la propriété universelle du pullback. $\square$

Lemme 2. *En reprenant les notations du lemme* 1*, si f est un épimorphisme alors $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$ est un épimorphisme.*

Démonstration. Supposons que f soit un épimorphisme et qu'il existe a et b des morphismes tels que $a \circ (f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y) = b \circ (f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y)$, en composant par i_X à droite on obtient que $a \circ f = b \circ f$ donc que $a = b$. $\square$

Lemme 3. *Dans une catégorie abélienne, un épimorphisme est le conoyau de son noyau et un monomorphisme est le noyau de son conoyau.*

Démonstration. Cela provient essentiellement du fait que la factorisation canonique dans une catégorie abélienne est un isomorphisme. □

Proposition. *Dans $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, si le carré commutatif suivant est un pullback et que f est un épimorphisme alors le carré est aussi un pushout.*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, two heads, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Démonstration. Par le lemme 1, et en reprenant les notations de sa démonstration on identifie W avec K le noyau de $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$, et les morphismes u et v avec les morphismes $\pi_X \circ k$ et $\pi_Y \circ k$. Par les lemmes 2 et 3, f étant un épimorphisme le morphisme $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$ est un épimorphisme et est le conoyau de son noyau k.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\pi_Y \circ k"] \arrow[dd, "\pi_X \circ k"'] \arrow[dr, "k"] & & Y \arrow[dl, shift right, "i_Y"'] \arrow[dd, bend left, "g"] \arrow[dddr, bend left, "y"] & \\ & X \oplus Y \arrow[ur, shift right, "\pi_Y"'] \arrow[dl, shift left, "\pi_X"] \arrow[dr, two heads, "f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y"] \arrow[ddrr, bend right, "x \circ \pi_X - y \circ \pi_Y"'] & & \\ X \arrow[ur, shift left, "i_X"] \arrow[rr, two heads, "f"'] \arrow[drrr, bend right, "x"'] & & Z \arrow[dr, dashed, "\pi"] & \\ & & & Z' \end{tikzcd}$$

Soit Z' un objet de $\mathscr{A}$ et $x : X \to Z'$, $y : Y \to Z'$ des morphismes tels que $x \circ \pi_X \circ k = y \circ \pi_Y \circ k$. On a alors que $(x \circ \pi_X - y \circ \pi_Y) \circ k = 0$ donc $f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y$ étant le conoyau de k, il existe $\pi : Z \to Z'$ tel que :

$$x \circ \pi_X - y \circ \pi_Y = \pi \circ (f \circ \pi_X - g \circ \pi_Y).$$

En composant par i_X et par i_Y à droite on obtient respectivement que $x = \pi \circ f$ et $y = \pi \circ g$. Autrement dit, Z, f, g vérifient la propriété universelle du pushout. □

Proposition. *Dans $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, si le carré commutatif suivant est un pushout et que f est un monomorphisme alors le carré est aussi un pullback.*

$$\begin{tikzcd} W & Y \arrow[l, "v"'] \\ X \arrow[u, "u"] & Z \arrow[l, hook', "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Par dualité de la proposition précédente. □