

## Algorithmique Algébrique

### Récurrence sur deux indices :

**Proposition.** Soit  $P(n, k)$  une propriété dépendant du couple d'entier  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  alors :

$$\left[ P(0, 0) \text{ et } [\forall n, k, P(n, k) \Rightarrow P(n, k+1)] \text{ et } \forall n, [[\forall k, P(n, k)] \Rightarrow P(n+1, 0)] \right] \implies \forall n, k, P(n, k)$$

*Démonstration.* On pose  $Q(n) = [\forall k \in \mathbb{N}, P(n, k)]$ . Supposons que

$$\left[ P(0, 0) \text{ et } [\forall n, k, P(n, k) \Rightarrow P(n, k+1)] \text{ et } \forall n, [[\forall k, P(n, k)] \Rightarrow P(n+1, 0)] \right]$$

et montrons que  $Q(n)$  est vraie pour tout  $n$ , ce qui impliquera bien  $\forall n, k, P(n, k)$ . On montre que  $Q(n)$  est vraie par récurrence sur  $n$  :

Initialisation : A t-on  $Q(0) = [\forall k \in \mathbb{N}, P(0, k)]$  ? On le montre par récurrence sur  $k$  :

Initialisation :  $P(0, 0)$  est vraie par hypothèse.

Hérédité : Montrons que  $P(0, k) \Rightarrow P(0, k+1)$ . Par hypothèse on sait que :

$$\forall n, k, P(n, k) \Rightarrow P(n, k+1)$$

ce qui est en particulier vraie pour  $n = 0$ .

Conclusion :  $Q(0)$  est vraie.

Hérédité : Montrons que  $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ . On doit montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, P(n+1, k)$  est vraie.

On le montre par récurrence sur  $k$  :

Initialisation : Montrons que  $P(n+1, 0)$  est vraie. Par hypothèse  $P(n, k)$  est vraie pour tout  $k$  donc  $P(n+1, 0)$  est vraie puisque :

$$\forall n, [[\forall k, P(n, k)] \Rightarrow P(n+1, 0)]$$

Hérédité : Montrons que  $P(n, k) \Rightarrow P(n, k+1)$ . C'est immédiat par l'hypothèse :

$$\forall n, k, P(n, k) \Rightarrow P(n, k+1)$$

Conclusion : si  $Q(n)$  vraie alors  $Q(n+1)$  est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence  $Q(n)$  est vraie pour tout  $n$ . On a bien montré que  $\forall n, k, P(n, k)$  est vraie.  $\square$

**Proposition.** On définit la fonction d'Ackermann  $A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} A(0, n) = n + 1 \\ A(m + 1, 0) = A(m, 1) \\ A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n)) \end{cases}$$

Alors, pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  le calcul de  $A(m, n)$  se termine en un nombre fini d'étape.

**Remarque.** Le calcul de  $A(m, n)$  (si  $m \neq 0$ ) fait intervenir un calcul en  $A(m - 1, \text{un truc})$ . Ceci nous donne une première indication pour rédiger la récurrence qui suit : plutôt sur  $m$ .

*Démonstration.* On pose les propriétés suivantes :

$$P(m, n) := [\text{Le calcul de } A(m, n) \text{ se termine en un nombre fini d'étape.}]$$

$$Q(m) := [\forall n, P(m, n) \text{ est vraie}]$$

Montrons que  $Q(m)$  est vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}$  par récurrence sur  $m$  :

Initialisation : A t-on  $Q(0) = [\forall n \in \mathbb{N}, P(0, n)]$ ? Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a par définition  $A(0, n) = n + 1$ , le calcul de  $A(0, n)$  se fait donc en une étape et  $P(0, n)$  est vraie pour tout  $n$ .

Hérédité : Montrons que  $Q(m) \Rightarrow Q(m + 1)$ . On cherche donc à montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le calcul de  $A(m + 1, n)$  s'effectue en un nombre fini d'étape. Montrons ceci par récurrence sur  $n$  :

Initialisation : Montrons que  $P(m + 1, 0)$  est vraie. Par définition de  $A$  on a  $A(m + 1, 0) = A(m, 1)$ . Or  $A(m, 1)$  se calcule en un nombre fini d'étape car  $Q(m)$  est vrai, donc  $P(m + 1, 0)$  est vrai.

Hérédité : Montrons que  $P(m + 1, n) \Rightarrow P(m + 1, n + 1)$ . Ici on cherche à montrer que le calcul de  $A(m + 1, n + 1)$  s'effectue en un nombre fini d'étape. De la formule :

$$A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n)),$$

on déduit que ce calcul s'effectue en un nombre fini d'étape si :

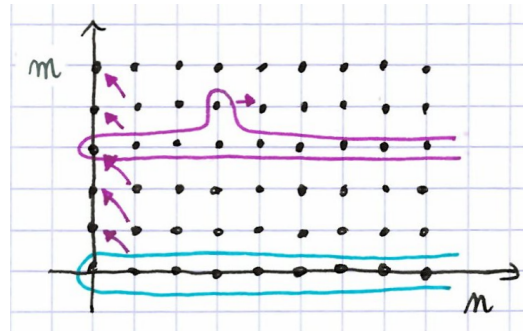
1. Le calcul de  $A(m + 1, n)$  s'effectue en un nombre fini d'étape, ce qui est vraie par hypothèse de récurrence :  $P(m + 1, n)$  est vraie.
2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , le calcul de  $A(m, k)$  s'effectue en un nombre fini d'étape, ce qui est vraie par hypothèse de récurrence car on a supposé  $Q(m)$  vraie.

On peut en conclure que le calcul de  $A(m + 1, n + 1)$  s'effectue en un nombre fini d'étape

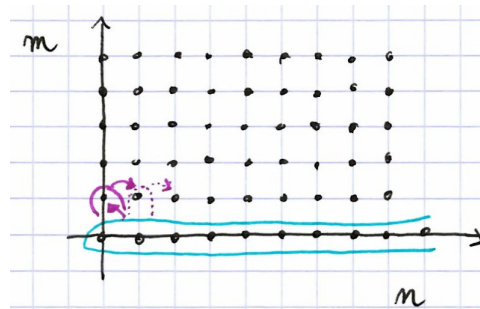
Conclusion : On a montré  $Q(m + 1, n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Conclusion : On a montré que  $Q(m)$  était vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , autrement dit pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  le calcul de  $A(m, n)$  s'effectue en un nombre fini d'étape.  $\square$

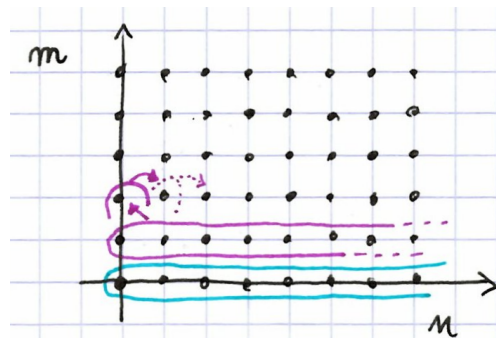
**Remarque.** Ici on utilise la règle de déduction suivante (bleu = condition initiale) :



Au début, la propriété est vérifiée pour  $m = 0$  et pour tout  $n$ ,  $P(0, 1)$  est vrai car par la règle de calcul  $A(0, 1) = A(1, 0)$ . Puis de proche en proche (flèche en pointillée), on déduit par récurrence que la propriété est vraie sur toute la ligne :



La propriété est vraie sur toute la ligne  $m = 1$ , par la règle de calcul  $A(0, 2) = A(1, 1)$  on déduit que la propriété  $P(0, 2)$  est vraie, de proche en proche on montre que la propriété est vraie sur tout la ligne et on continue....



On voit ainsi que l'on va recouvrir tout  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . La démonstration précédente est juste une formalisation de ce processus.

**Proposition.** On rappelle que les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$  pour des entiers  $n \geq k \geq 0$  vérifient :

$$\forall n \geq k \geq 0, \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Montrons par récurrence que  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  pour tous  $n \geq k \geq 0$ .

**Remarque.** On remarque ici que le calcul de  $\binom{n+1}{k+1}$  fait intervenir des termes en  $\binom{n}{-}$  où  $-$  est un truc. Ceci nous donne une indication pour rédiger la récurrence qui suit : plutôt sur  $n$ .

*Démonstration.* On pose les propriétés suivantes :

$$P(n, k) := \left[ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right] \quad \text{et} \quad Q(n) := [\forall, 0 \leq k \leq n, P(n, k) \text{ est vraie}]$$

Montrons par récurrence sur  $n$  que  $Q(n)$  est vraie :

Initialisation : Pour  $n = 0$ ,  $Q(0) = [P(0, 0) \text{ est vraie}]$ . Vérifions :

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{0!}{0!0!} = 1$$

Donc  $P(0, 0)$  est vraie et  $Q(0)$  est vérifié.

Hérédité : Montrons que  $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$ . On cherche à montrer que pour tout  $0 \leq k \leq n+1$  on a :

$$P(n+1, k) : \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

Montrons le par récurrence (on parle plutôt d'induction étant donné que  $k \leq n+1$ ) sur  $k$  :

Initialisation :  $P(n+1, 0)$  est vraie car :

$$\binom{n+1}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = 1$$

Hérédité : Montrons que  $P(n+1, k) \Rightarrow P(n+1, k+1)$ . Si  $k+1 = n+1$  alors  $P(n+1, k+1)$  est vérifiée (et on "arrête" ici la récurrence), supposons que  $k < n$  :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

car par hypothèse de récurrence  $Q(n)$  est vraie.

Il suffit maintenant de factoriser :

$$\begin{aligned}
 \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)k!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k} \right) \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left( \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} \right) \\
 &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}
 \end{aligned}$$

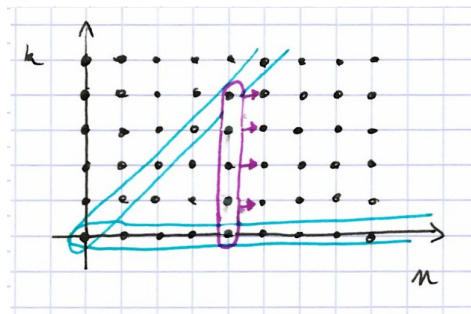
D'où :

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}.$$

Conclusion : Par récurrence  $P(n+1, k)$  est vraie  $\forall 0 \leq k \leq n+1$ ,  $Q(n+1)$  est donc vraie.

Conclusion : Par récurrence  $Q(n)$  est vraie pour tout  $n$ , autrement dit la formule  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  est vraie pour tous  $n \geq k \geq 0$ .  $\square$

**Remarque.** Ici on utilise la règle de déduction suivante (bleu = condition initiale) :



On pourrait utiliser la règle de déduction comme dans le cours (illustrée ci-dessous), mais il me semble que la précédente apparaisse plus naturellement.

