Algèbre linéaire : Théorème du rang

Pré-requis : famille libre, famille génératrice, base, existence de base, théorème de la base extraite et théorème de la base incomplète.
Cadre : Ici E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition. *Soit $f : E \to F$ linéaire,*

1. *On note* $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$, $\mathrm{Ker}(f)$ *est le **noyau** de f.*
2. *On note* $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$, $\mathrm{Im}(f)$ *est l'**image** de f.*

Exercice. *Soit $f : E \to F$ linéaire, montrer que :*

1. *Le noyau* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *L'image* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*
3. *Si $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est une famille génératrice de E, alors $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}$ est une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$*, autrement dit on a* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(a_i),\ 1 \leq i \leq n)$.
4. *L'application f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ linéaire, alors f est **injective** si et seulement si* $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. On rappelle que $f : E \to F$ injective $\iff \forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, alors pour $x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Réciproquement, supposons que f est injective. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0$ or $f(0) = 0$ car f linéaire donc $f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$. □

Proposition. *Soit $f : E \to F$ linéaire et **injective** alors l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F. Autrement dit si $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est une famille libre dans E, la famille des images $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}$ est une famille libre dans F.*

Démonstration. Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une famille libre dans E. Montrons que la famille des images $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}$ est une famille libre dans F : soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}$ une collection de scalaire tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) = 0$ alors par linéarité de f :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i a_i) = 0 \iff f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = 0 \overset{f \text{ injective}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$$

La famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ étant libre ceci implique que $\lambda_i = 0,\ \forall 1 \leq i \leq n$. Ce qui conclut. □

Proposition (Théorème du rang)**.** *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors*

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Démonstration. On sait que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, on prend $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ une base de $\mathrm{Ker} f$ (donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$). La famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est donc une famille libre de E, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base de E : il existe des vecteurs $\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ tels que $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ soit une base de E (on a alors $\dim(E) = n + r$ avec $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + r$).

Par l'exercice, $\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_r)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, or par définition des a_i, on a $f(a_i) = 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Donc $\{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_r)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ une collection de scalaires tels que $\sum_{i=1}^r \lambda_i f(b_i) = 0$. Par linéarité, on obtient que

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(b_i) = 0 \iff f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i\right) = 0 \iff \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i \in \mathrm{Ker}(f).$$

Comme $\sum_{i=1}^r \lambda_i b_i \in \mathrm{Ker}(f)$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i b_i$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base de $\mathrm{Ker}(f)$, autrement dit il existe des scalaire $(\mu_j)_{1\leq j \leq n} \in \mathbb{K}$ avec $\sum_{i=1}^r \lambda_i b_i = \sum_{j=1}^n \mu_j a_j$. Les λ_i et les μ_j sont donc tels que :

$$-\mu_1 a_1 - \mu_2 a_2 - \cdots - \mu_n a_n + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_r b_r = 0.$$

Comme la famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ est une base de E, elle est en particulier libre, ce qui implique que pour tout $1 \leq j \leq n$, $\mu_j = 0$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, $\lambda_i = 0$. Ce qui montre que $\{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_r)\}$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ donc une base. On obtient bien $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r$.

Pour conclure on a bien $\dim(E) = n + r = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. □

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire **injective** (donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$) entre deux espaces vectoriels de même dimensions ($\dim(E) = \dim(F)$) alors f est bijective.*

Démonstration. C'est une application du théorème du rang : on sait que $\dim(F) = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Donc $\dim(F) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ et par définition $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} \subseteq F$ donc $F = \mathrm{Im}(F)$ et f est surjective. Par hypothèse f injective, donc f bijective.

On peut le voir d'une autre façon : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, par l'exercice $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme f est injective $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F, qui possède le même nombre de vecteur que $\mathcal{B}$, c'est à dire $\dim(E)$ vecteurs. Donc $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$ et $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ implique que $\mathrm{Im}(f) = F$ et que f est surjective. □

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire **surjective** (donc $\mathrm{Im}(f) = F$) entre deux espaces vectoriels de même dimensions $\dim(E) = \dim(F)$ alors f est bijective.*

Démonstration. Exercice, indication : utiliser le théorème du rang. □