

Algorithmique Algébrique

TD2 Exercice 3. Un exemple de changement de base.

On cherche à écrire $(10001010101101)_2$ en base 5. Un nombre n s'écrit $(n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0)_b$ en base b si $n = \sum_{i=0}^k n_i b^i$. Déterminer l'écriture de $(10001010101101)_2$ en base 5 revient à écrire $(10001010101101)_2$ comme une somme pondérée de puissance successive de 5. Pour trouver une telle décomposition on effectue une division euclidienne de $(10001010101101)_2$ par $(101)_2 = (5)_{10}$.

Par la division ci dessous à gauche on trouve $10001010101101 = 11011101111 \times 101 + 10$, il nous faut maintenant écrire 11011101111 en somme de puissance de 5, on applique le même procédé jusqu'à ce que le quotient soit plus petit que 101.

10001010101101	101	11011101111	101
-1×101	11011101111	-1×101	101100011
111010101101		111101111	
-1×101		-0×101	
10010101101		111101111	
-0×101		-1×101	
10010101101		10101111	
-1×101		-1×101	
1000101101		1111	
-1×101		-0×101	
11101101		1111	
-1×101		-0×101	
1001101		1111	
-0×101		-0×101	
1001101		1111	
-1×101		-1×101	
100101		101	
-1×101		-1×101	
10001		0	
-1×101			
111			
-1×101			
10			

$$\begin{array}{r|l}
 101100011 & 101 \\
 -1 \times 101 & \hline
 1000111 & \\
 100011 & \\
 -0 \times 101 & \\
 100011 & \\
 -0 \times 101 & \\
 100011 & \\
 -0 \times 101 & \\
 100011 & \\
 -0 \times 101 & \\
 100011 & \\
 -1 \times 101 & \\
 1111 & \\
 -1 \times 101 & \\
 101 & \\
 -1 \times 101 & \\
 0 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 1000111 & 101 \\
 -1 \times 101 & \hline
 11111 & \\
 -1 \times 101 & \\
 1011 & \\
 -1 \times 101 & \\
 1 & \\
 -0 \times 101 & \\
 1 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 1110 & 101 \\
 -1 \times 101 & \hline
 100 & \\
 -0 \times 101 & \\
 100 &
 \end{array}$$

Finalement on obtient que :

$$\begin{aligned}
 10001010101101 &= 11011101111 \times 101 + 10 \\
 &= (101100011 \times 101) \times 101 + 10 \\
 &= ((1000111 \times 101) \times 101) \times 101 + 10 \\
 &= (((1110 \times 101 + 1) \times 101) \times 101) \times 101 + 10 \\
 &= (((((10 \times 101 + 100) \times 101 + 1) \times 101) \times 101) \times 101) \times 101 + 10 \\
 &= 10 \times (101)^5 + 100 \times (101)^4 + 1 \times (101)^3 + 10 \\
 &= 2 \times (5)^5 + 4 \times (5)^4 + 1 \times (5)^3 + 2
 \end{aligned}$$

La dernière ligne ci dessus est ici écrite en base 10. On peut alors écrire :

$$(10001010101101)_2 = (241002)_5.$$