Algorithmique Algébrique

TD3 Exercice 7 (formule de Legendre).

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que :

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$$

Remarquons que cette somme est finie, en effet si α_0 est le plus petit entier tel que $p^{\alpha_0} > n$, alors pour tout $\alpha_0 \leq \alpha$ on a $\frac{n}{p^\alpha} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor = 0$. Autrement dit :

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$$

Remarquons aussi que comme $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$:

$$v_p(n!) = v_p\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i) = \sum_{i=2}^{n} v_p(i).$$

Notons que pour tout $2 \leq i \leq n,\ v_p(i) < \alpha_0$. Pour calculer la somme ci-dessus à droite, on regroupe par paquets les i entre 2 et n qui ont la même valuation p-adique :

$$\sum_{i=2}^{n} v_p(i) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \alpha \times \mathrm{card}(\{2 \leq i \leq n \mid v_p(i) = \alpha\})$$

Il nous reste donc à déterminer $\mathrm{card}(\{2 \leq i \leq n \mid v_p(i) = \alpha\})$ c'est à dire combien de nombre compris entre 2 et n ont une valuation p-adique égale à un α donné. Ce sont les nombres qui sont divisible par p^α, mais non divisible par $p^{\alpha+1}$.
De façon générale pour $a \in \mathbb{N}$, combien a-t-on de nombre $2 \leq i \leq n$ tel que $a \mid i$? Ceci revient à calculer le "nombre de fois que l'on peut mettre a dans n" autrement dit c'est le quotient de la division euclidienne de n par a, que l'on peut écrire $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}$, le nombre de $2 \leq i \leq n$ tel que $v_p(i) = p^\alpha$ est donc $\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor$, alors :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \alpha \times \mathrm{card}(\{2 \leq i \leq n \mid v_p(i) = \alpha\}) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \alpha \left(\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \alpha \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor - \sum_{\alpha=2}^{\alpha_0+1} (\alpha - 1) \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \end{aligned}$$

Ce qui conclut le calcul.