Théorème chinois

Lemme. *Dans une catégorie abélienne, on a :*

$$X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B \iff X = A + B$$

Où $A \xrightarrow{j_A} X$ *et* $B \xrightarrow{j_B} X$ *sont des sous-objets de* X.

Démonstration. Soient les applications $f = j_A \circ \pi_A + j_B \circ \pi_B$, $g = i_{X/A} \circ p_A + i_{X/B} \circ p_B$ et $h = i_{X/A} \circ p_A - i_{X/B} \circ p_B$ inscrites dans les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "i_A"] \arrow[ddr, bend right, "j_A"'] & A \oplus B \arrow[l, shift left, "\pi_A"] \arrow[r, shift right, "\pi_B"'] \arrow[d, "\pi_f"'] \arrow[dd, bend left, "f"] & B \arrow[l, shift right, "i_B"'] \arrow[ddl, bend left, "j_B"] \\
& A + B \arrow[d, "i_f"'] & \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[dr, "k(g)"] & B \arrow[d, "j_B"] & \\
A \arrow[r, "j_A"'] & X \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] \arrow[dr, shift left, "g"] \arrow[dr, shift right, "h"'] & X/A \arrow[d, shift right, "i_{X/A}"'] \\
& X/B \arrow[r, shift right, "i_{X/B}"'] & X/A \oplus X/B \arrow[u, shift right, "\pi_{X/A}"'] \arrow[l, shift right, "\pi_{X/B}"']
\end{tikzcd}$$

Remarquons que $X/A \cap B = \text{Coker}(\text{Ker}(g)) \simeq \text{Im}(g)$ et donc que g est un épimorphisme si et seulement si $X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B$. D'autre part, l'égalité $X = A + B$ se traduit par la surjectivité de f. Finalement, l'énoncé du lemme est donc équivalent à montrer que f est épimorphisme si et seulement g est un épimorphisme.

Notons que g et h diffèrent seulement d'un isomorphisme $h = t \circ g$ avec $t = i_{X/A} \circ \pi_{X/A} - i_{X/B} \circ \pi_{X/B}$ et $t^2 = 1$. Nous allons montrer que h (et donc g) est un épimorphisme si et seulement si f est un épimorphisme en montrant que leurs conoyaux sont isomorphes.

Par définition de f on a $ck(f) \circ j_A = 0$ et $ck(f) \circ j_B = 0$, ce qui donne des uniques morphismes $\lambda_A : X/A \to \text{Coker}(f)$ et $\lambda_B : X/B \to \text{Coker}(f)$ tels que $ck(f) = \lambda_A \circ p_A = \lambda_B \circ p_B$. Montrons que le carré commutatif $X, X/A, X/B, \text{Coker}(f)$ dans le diagramme suivant est un pushout :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] \arrow[dr, "ck(f)"] & X/A \arrow[d, "\lambda_A"] \arrow[ddr, bend left, "u_A"] & \\
X/B \arrow[r, "\lambda_B"'] \arrow[drr, bend right, "u_B"'] & \text{Coker}(f) \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\
& & U
\end{tikzcd}$$

Supposons qu'il existe $u_A : X/A \to U$ et $u_B : X/B \to U$ tels que $u_A \circ p_A = u_B \circ p_B$, alors on montre facilement que $u_A \circ p_A \circ f = 0$ et qu'il existe donc un unique morphisme $\alpha : \text{Coker}(f) \to U$ tel que $\beta \circ ck(f) = u_A \circ p_A$. De plus,

$$\beta \circ \lambda_A \circ p_A = u_A \circ p_A \quad \text{et} \quad \beta \circ \lambda_B \circ p_B = u_A \circ p_A = u_B \circ p_B$$

D'où $\beta \circ \lambda_A = u_A$ et $\beta \circ \lambda_B = u_B$ étant donné que p_A et p_B sont des épimorphismes. Ainsi, $(\text{Coker}(f), \lambda_A, \lambda_B)$ est bien le pushout de (X, p_A, p_B).

Montrons maintenant que le carré dans le diagramme suivant est aussi un pushout :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p_A"] \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "p_B"'] & & X/A \arrow[dd, "ck(h)\circ i_{X/A}"'] \arrow[ddr, bend left, "u_A"] & \\
& X/A \oplus X/B \arrow[ur, "\pi_{X/A}"'] \arrow[dl, "\pi_{X/B}"'] \arrow[dr, "ck(h)"] \arrow[drr, bend right, "\omega"'] & & \\
X/B \arrow[rr, "ck(h)\circ i_{X/B}"'] \arrow[drrr, bend right, "u_B"'] & & \mathrm{Coker}(h) \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
& & & U
\end{tikzcd}$$

Supposons qu'il existe u_A et u_B comme précédemment. On pose $\omega = u_A \circ \pi_{X/A} + u_B \circ \pi_{X/B}$. On vérifie que $\omega \circ h = u_A \circ p_A - u_B \circ p_B = 0$, il existe alors un unique morphisme α tel que $\alpha \circ ck(h) = \omega$. On vérifie facilement que $\alpha \circ ck(h) \circ i_{X/A} = u_A$ et $\alpha \circ ck(h) \circ i_{X/B} = u_B$. Ainsi, $(\mathrm{Coker}(f), \circ ck(h) \circ i_{X/A}, \circ ck(h) \circ i_{X/B})$ est bien le pushout de (X, p_A, p_B).

Par unicité à isomorphisme près du pushout de (X, p_A, p_B) on obtient que $\mathrm{Coker}(f) \simeq \mathrm{Coker}(h)$ ce qui achève la démonstration. ☐

Corollaire. *Dans une catégorie abélienne, si X est un objet possédant un nombre fini de sous-objet maximaux $\{M_i\}_{i\in I}$ alors :*

$$X/\mathrm{Rad}(X) \simeq \bigoplus_{i\in J} X/M_i$$

Où $\mathrm{Rad}(X) = \bigcap_{i\in I} M_i$ *et* $J \subseteq I$.

Démonstration. On procède par induction sur I, en remarquant à chaque étape que comme M_i est maximal si $A \cap M_i \neq A$ on a $M_i + A = X$. ☐

Corollaire. *Soit R un anneau, X un R-module et X, Y deux sous modules de X, alors*

$$X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B \iff X = A + B$$

Démonstration dans les modules. Remarquons premièrement que l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : X &\to X/A \oplus X/B \\ x &\mapsto (x + A, x + B) \end{aligned}$$

est bien définie et que $\mathrm{Ker}(\varphi) = A \cap B$. Autrement dit on dispose d'un morphisme injectif $\tilde{\varphi} : X/A \cap B \to X/A \oplus X/B$.

Montrons que $X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B \Rightarrow X = A + B$. Soit $y \in A$, alors $(y + A, 0 + B) \in X/A \oplus X/B$ il existe donc un unique $x \in X$ tel que $(x+A, x+B) = \tilde{\varphi}(x+A\cap B) = (y+A, 0+B)$. On obtient alors que $y - x \in A$ et $x \in B$, d'où $y = (y - x) + x \in A + B$.

Montrons que $X = A + B \Rightarrow X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B$. Il suffit de montrer que si $X = A + B$ alors φ est surjective. Soit $(x+A, y+B) \in X/A \oplus X/B$, alors il existe $\tilde{x} = x_A + x_B$ et $\tilde{y} = y_A + y_B$ avec $x_A, y_A \in A,\ x_B, y_B \in B$ tels que $\tilde{x} + A = x_B + A = x + A$ et $\tilde{y} + B = y_A + B = y + B$. On vérifie maintenant facilement que $\varphi(y_A + x_B) = (x_B + A, y_A + B) = (x + A, y + B)$. D'où la surjectivité de φ. ☐

Corollaire. *Soit a et b deux entiers, alors $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \iff pgcd(a, b) = 1$.*