

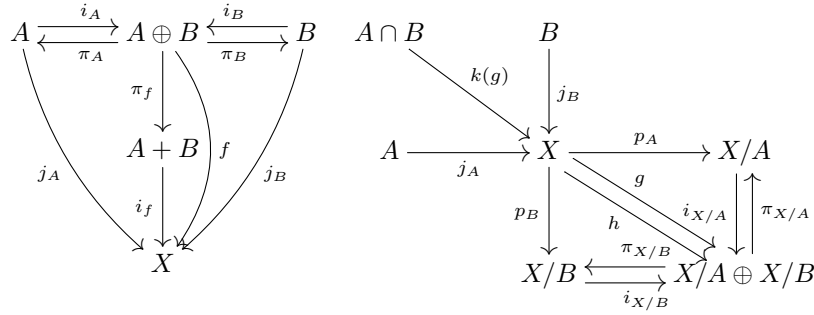
## Théorème chinois

**Lemme.** Dans une catégorie abélienne, on a :

$$X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B \iff X = A + B$$

Où  $A \xrightarrow{j_A} X$  et  $B \xrightarrow{j_B} X$  sont des sous-objets de  $X$ .

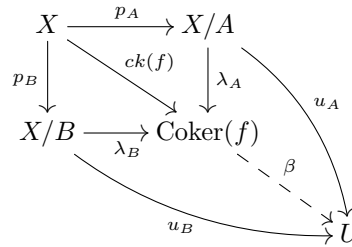
*Démonstration.* Soient les applications  $f = j_A \circ \pi_A + j_B \circ \pi_B$ ,  $g = i_{X/A} \circ p_A + i_{X/B} \circ p_B$  et  $h = i_{X/A} \circ p_A - i_{X/B} \circ p_B$  inscrites dans les diagrammes suivants :



Remarquons que  $X/A \cap B = \text{Coker}(\text{Ker}(g)) \simeq \text{Im}(g)$  et donc que  $g$  est un épimorphisme si et seulement si  $X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B$ . D'autre part, l'égalité  $X = A + B$  se traduit par la surjectivité de  $f$ . Finalement, l'énoncé du lemme est donc équivalent à montrer que  $f$  est épimorphisme si et seulement si  $g$  est un épimorphisme.

Notons que  $g$  et  $h$  diffèrent seulement d'un isomorphisme  $h = t \circ g$  avec  $t = i_{X/A} \circ \pi_{X/A} - i_{X/B} \circ \pi_{X/B}$  et  $t^2 = 1$ . Nous allons montrer que  $h$  (et donc  $g$ ) est un épimorphisme si et seulement si  $f$  est un épimorphisme en montrant que leurs conoyaux sont isomorphes.

Par définition de  $f$  on a  $ck(f) \circ j_A = 0$  et  $ck(f) \circ j_B = 0$ , ce qui donne des uniques morphismes  $\lambda_A: X/A \to \text{Coker}(f)$  et  $\lambda_B: X/B \to \text{Coker}(f)$  tels que  $ck(f) = \lambda_A \circ p_A = \lambda_B \circ p_B$ . Montrons que le carré commutatif  $X, X/A, X/B, \text{Coker}(f)$  dans le diagramme suivant est un pushout :

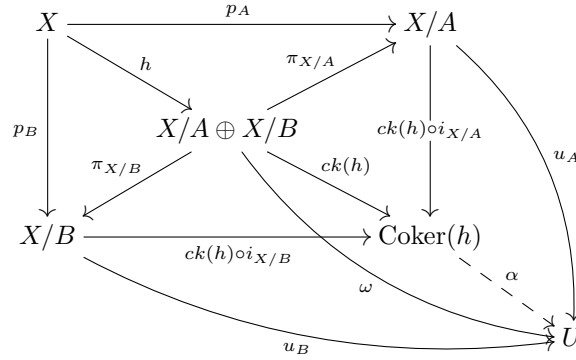


Supposons qu'il existe  $u_A: X/A \to U$  et  $u_B: X/B \to U$  tels que  $u_A \circ p_A = u_B \circ p_B$ , alors on montre facilement que  $u_A \circ p_A \circ f = 0$  et qu'il existe donc un unique morphisme  $\alpha: \text{Coker}(f) \to U$  tel que  $\beta \circ ck(f) = u_A \circ p_A$ . De plus,

$$\beta \circ \lambda_A \circ p_A = u_A \circ p_A \quad \text{et} \quad \beta \circ \lambda_B \circ p_B = u_A \circ p_A = u_B \circ p_B$$

D'où  $\beta \circ \lambda_A = u_A$  et  $\beta \circ \lambda_B = u_B$  étant donné que  $p_A$  et  $p_B$  sont des épimorphismes. Ainsi,  $(\text{Coker}(f), \lambda_A, \lambda_B)$  est bien le pushout de  $(X, p_A, p_B)$ .

Montrons maintenant que le carré dans le diagramme suivant est aussi un pushout :



Supposons qu'il existe  $u_A$  et  $u_B$  comme précédemment. On pose  $\omega = u_A \circ \pi_{X/A} + u_B \circ \pi_{X/B}$ . On vérifie que  $\omega \circ h = u_A \circ p_A - u_B \circ p_B = 0$ , il existe alors un unique morphisme  $\alpha$  tel que  $\alpha \circ ck(h) = \omega$ . On vérifie facilement que  $\alpha \circ ck(h) \circ i_{X/A} = u_A$  et  $\alpha \circ ck(h) \circ i_{X/B} = u_B$ . Ainsi,  $(\text{Coker}(f), \circ ck(h) \circ i_{X/A}, \circ ck(h) \circ i_{X/B})$  est bien le pushout de  $(X, p_A, p_B)$ .

Par unicité à isomorphisme près du pushout de  $(X, p_A, p_B)$  on obtient que  $\text{Coker}(f) \simeq \text{Coker}(h)$  ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Corollaire.** Dans une catégorie abélienne, si  $X$  est un objet possédant un nombre fini de sous-objet maximaux  $\{M_i\}_{i \in I}$  alors :

$$X/\text{Rad}(X) \simeq \bigoplus_{i \in J} X/M_i$$

Où  $\text{Rad}(X) = \bigcap_{i \in I} M_i$  et  $J \subseteq I$ .

*Démonstration.* On procède par induction sur  $I$ , en remarquant à chaque étape que comme  $M_i$  est maximal si  $A \cap M_i \neq A$  on a  $M_i + A = X$ .  $\square$

**Corollaire.** Soit  $R$  un anneau,  $X$  un  $R$ -module et  $X, Y$  deux sous modules de  $X$ , alors

$$X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B \iff X = A + B$$

*Démonstration dans les modules.* Remarquons premièrement que l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : X &\rightarrow X/A \oplus X/B \\ x &\mapsto (x + A, x + B) \end{aligned}$$

est bien définie et que  $\text{Ker}(\varphi) = A \cap B$ . Autrement dit on dispose d'un morphisme injectif  $\tilde{\varphi} : X/A \cap B \rightarrow X/A \oplus X/B$ .

Montrons que  $X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B \Rightarrow X = A + B$ . Soit  $y \in A$ , alors  $(y + A, 0 + B) \in X/A \oplus X/B$  il existe donc un unique  $x \in X$  tel que  $(x + A, x + B) = \tilde{\varphi}(x + A \cap B) = (y + A, 0 + B)$ . On obtient alors que  $y - x \in A$  et  $x \in B$ , d'où  $y = (y - x) + x \in A + B$ .

Montrons que  $X = A + B \Rightarrow X/A \cap B \simeq X/A \oplus X/B$ . Il suffit de montrer que si  $X = A + B$  alors  $\varphi$  est surjective. Soit  $(x + A, y + B) \in X/A \oplus X/B$ , alors il existe  $\tilde{x} = x_A + x_B$  et  $\tilde{y} = y_A + y_B$  avec  $x_A, y_A \in A$ ,  $x_B, y_B \in B$  tels que  $\tilde{x} + A = x_B + A = x + A$  et  $\tilde{y} + B = y_A + B = y + B$ . On vérifie maintenant facilement que  $\varphi(y_A + x_B) = (x_B + A, y_A + B) = (x + A, y + B)$ . D'où la surjectivité de  $\varphi$ .  $\square$

**Corollaire.** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers, alors  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \iff \text{pgcd}(a, b) = 1$ .