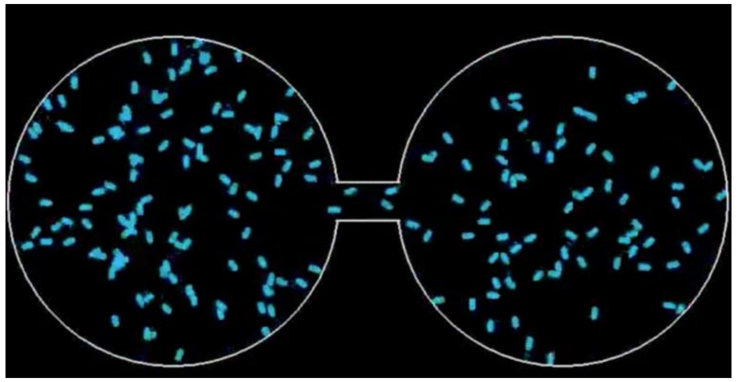
Des atomes au continu : comment mettre un fluide en équations ?

Isabelle Gallagher

Ecole Normale Supérieure de Paris

Université Paris-Diderot



Comment décrire un fluide ?

Comment décrire un fluide ?

On considère un liquide ou un gaz. On souhaite écrire des équations permettant de prévoir le mouvement futur du fluide connaissant son état à un instant donné.

Comment décrire un fluide ?

Un verre d'eau de 10cl est constitué d'environ 10^{24} particules (des molécules d'H_20) de diamètre environ 10^{-10} m qui sont en agitation permanente. Leur vitesse est de l'ordre de 600 m/s, les chocs entre deux particules sont donc très fréquents.

Comment décrire un fluide ?

Un verre d'eau de 10cl est constitué d'environ 10^{24} particules (des molécules d'$H_2 0$) de diamètre environ 10^{-10} m qui sont en agitation permanente. Leur vitesse est de l'ordre de 600 m/s, les chocs entre deux particules sont donc très fréquents.

Un moyen de décrire le fluide est donc d'analyser le mouvement de chacune de ces particules au cours du temps… ce qui est peut-être faisable (on le fera !), mais parait compliqué.

Comment décrire un fluide ?

Un verre d'eau de 10cl est constitué d'environ 10^{24} particules (des molécules d'H_20) de diamètre environ 10^{-10} m qui sont en agitation permanente. Leur vitesse est de l'ordre de 600 m/s, les chocs entre deux particules sont donc très fréquents.

Un moyen de décrire le fluide est donc d'analyser le mouvement de chacune de ces particules au cours du temps… ce qui est peut-être faisable (on le fera !), mais parait compliqué.

Pour connaître l'état *macroscopique* du fluide il est inutile de connaître son état *microscopique*, c'est-à-dire la configuration de chacune de ces particules.

Comment décrire un fluide ?

Une différence majeure entre l'état *macroscopique* du fluide et son état *microscopique* est que le premier peut présenter un caractère *irréversible* alors que le second non.

Comment décrire un fluide ?

Une différence majeure entre l'état *macroscopique* du fluide et son état *microscopique* est que le premier peut présenter un caractère *irréversible* alors que le second non.

Dans cet exposé nous allons

- décrire ce phénomène d'irréversibilité, son lien avec le désordre et les probabilités

Comment décrire un fluide ?

Une différence majeure entre l'état *macroscopique* et son état *microscopique* est que le premier peut présenter un caractère *irréversible* alors que le second non.

Dans cet exposé nous allons

- décrire ce phénomène d'irréversibilité, son lien avec le désordre et les probabilités
- présenter les équations microscopiques et macroscopiques

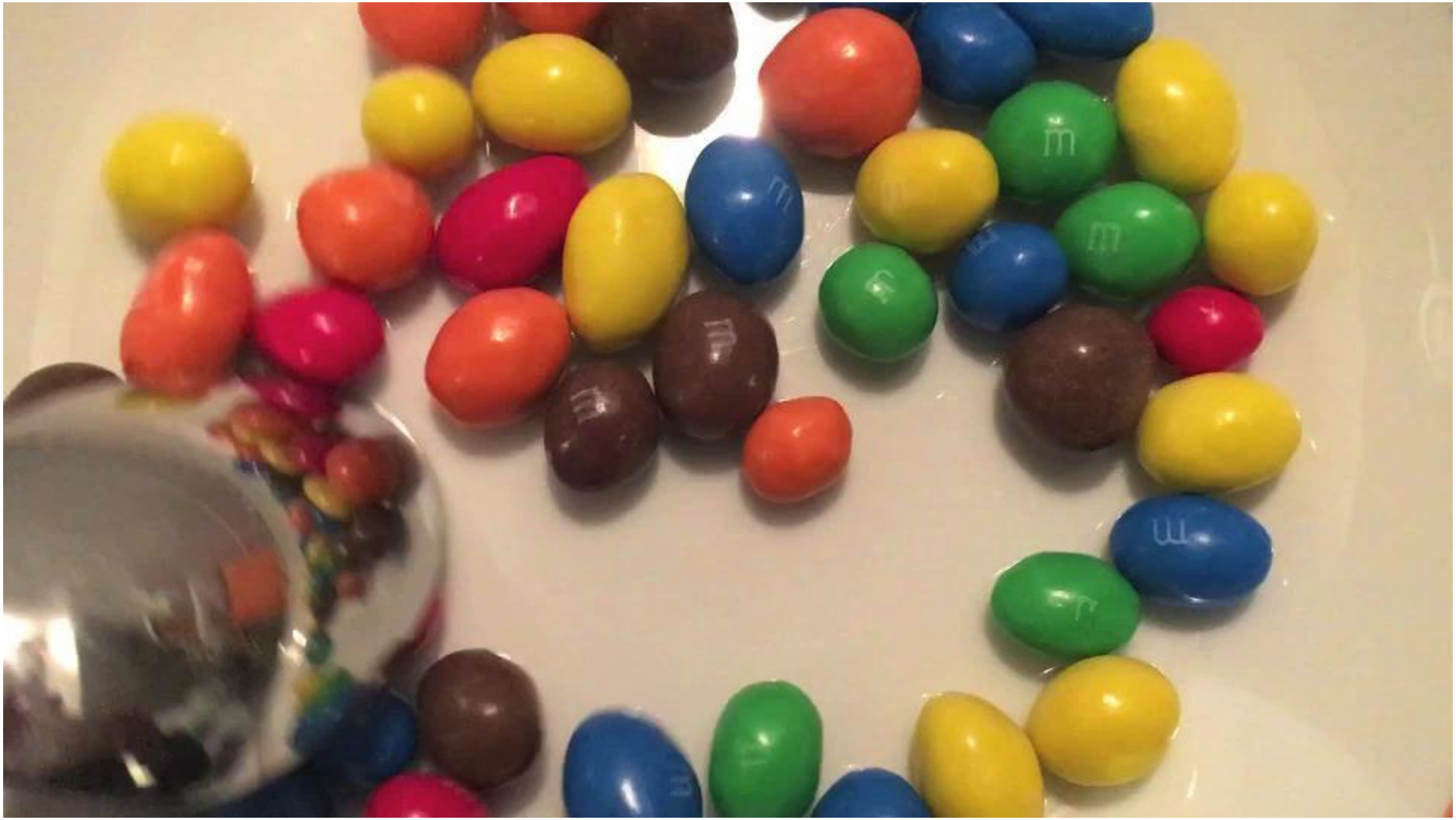
Comment décrire un fluide ?

Une différence majeure entre l'état *macroscopique* et son état *microscopique* est que le premier peut présenter un caractère *irréversible* alors que le second non.

Dans cet exposé nous allons

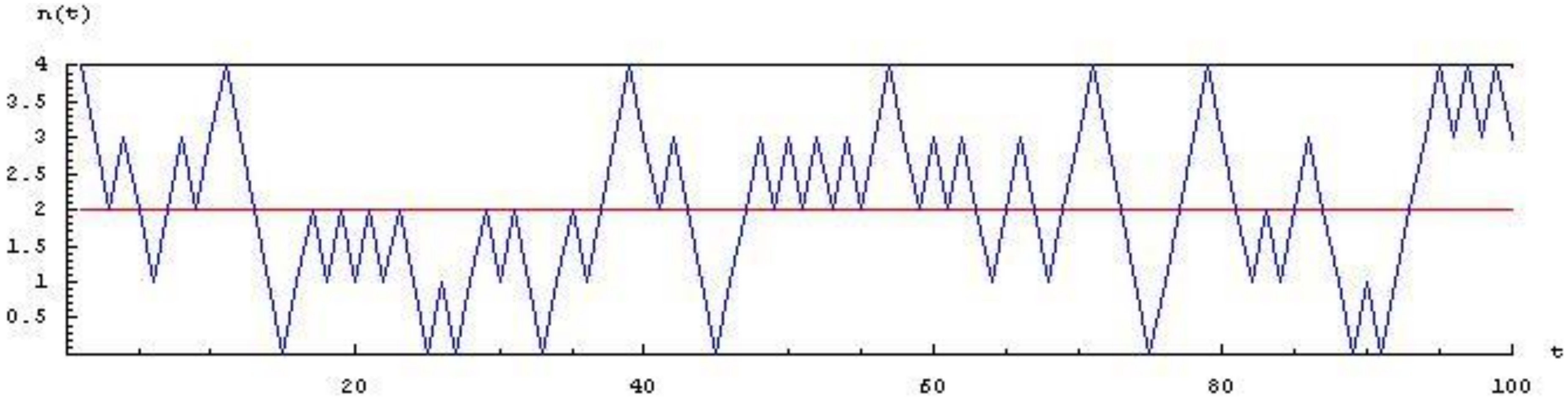
- décrire ce phénomène d'irréversibilité, son lien avec le désordre et les probabilités
- présenter les équations microscopiques et macroscopiques
- tenter de les résoudre !

Qu’est-ce que l’irréversibilité ?



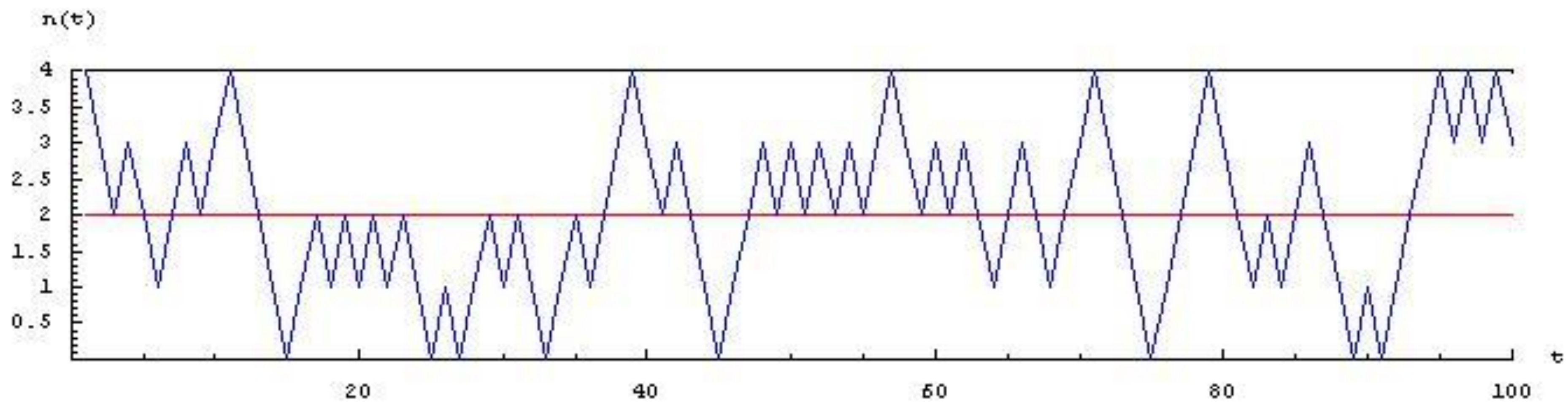
L’expérience de Paul et Tatiana Ehrenfest (1907)

Du moins probable au plus probable

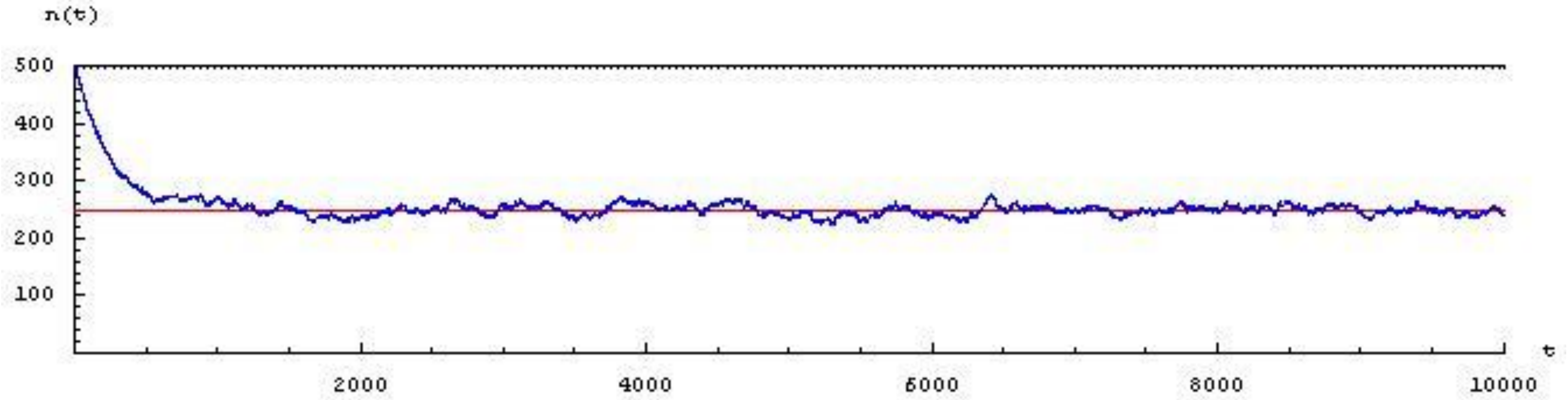


4 particules, 100 mesures

Du moins probable au plus probable

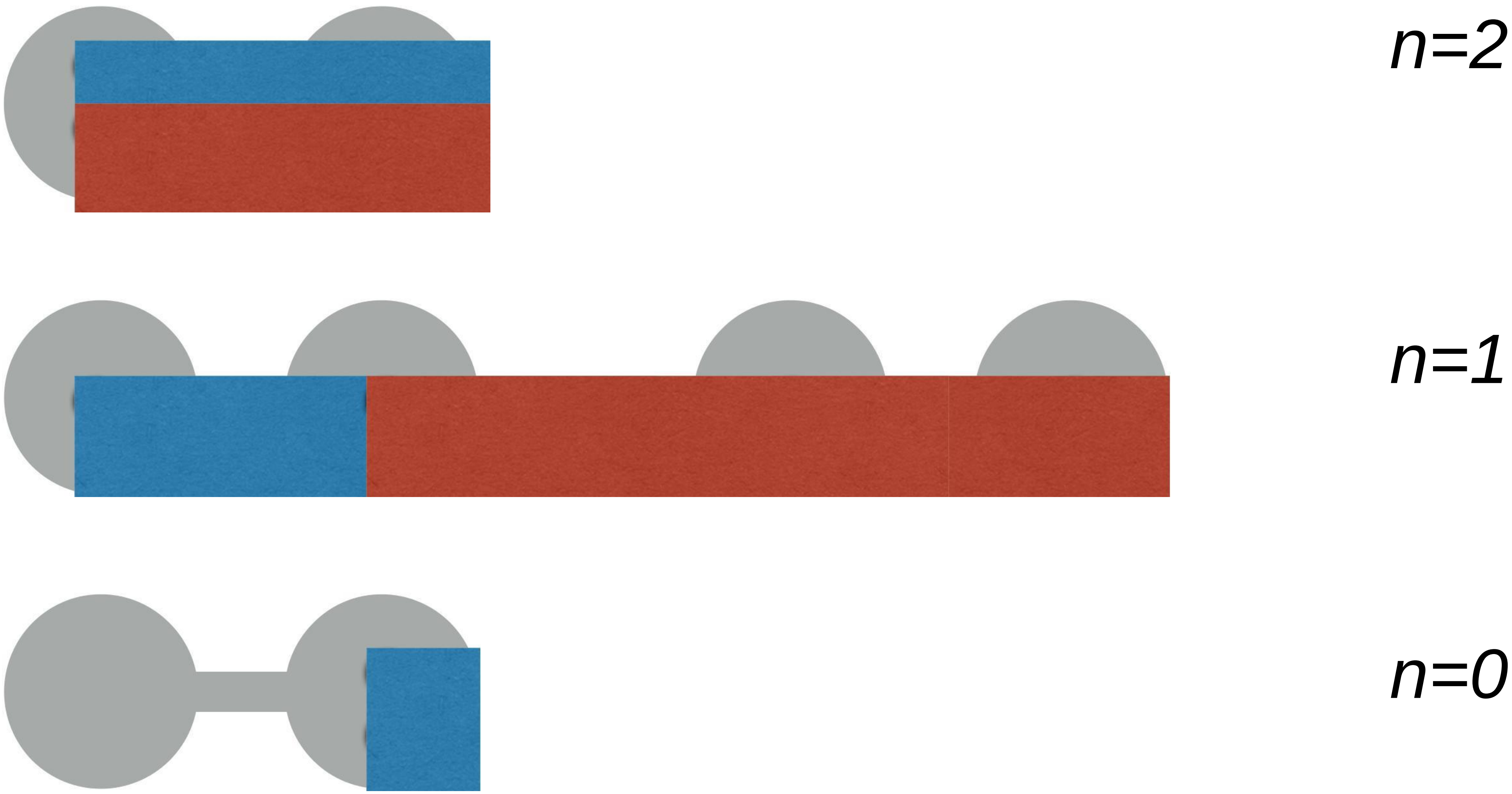


4 particules, 100 mesures



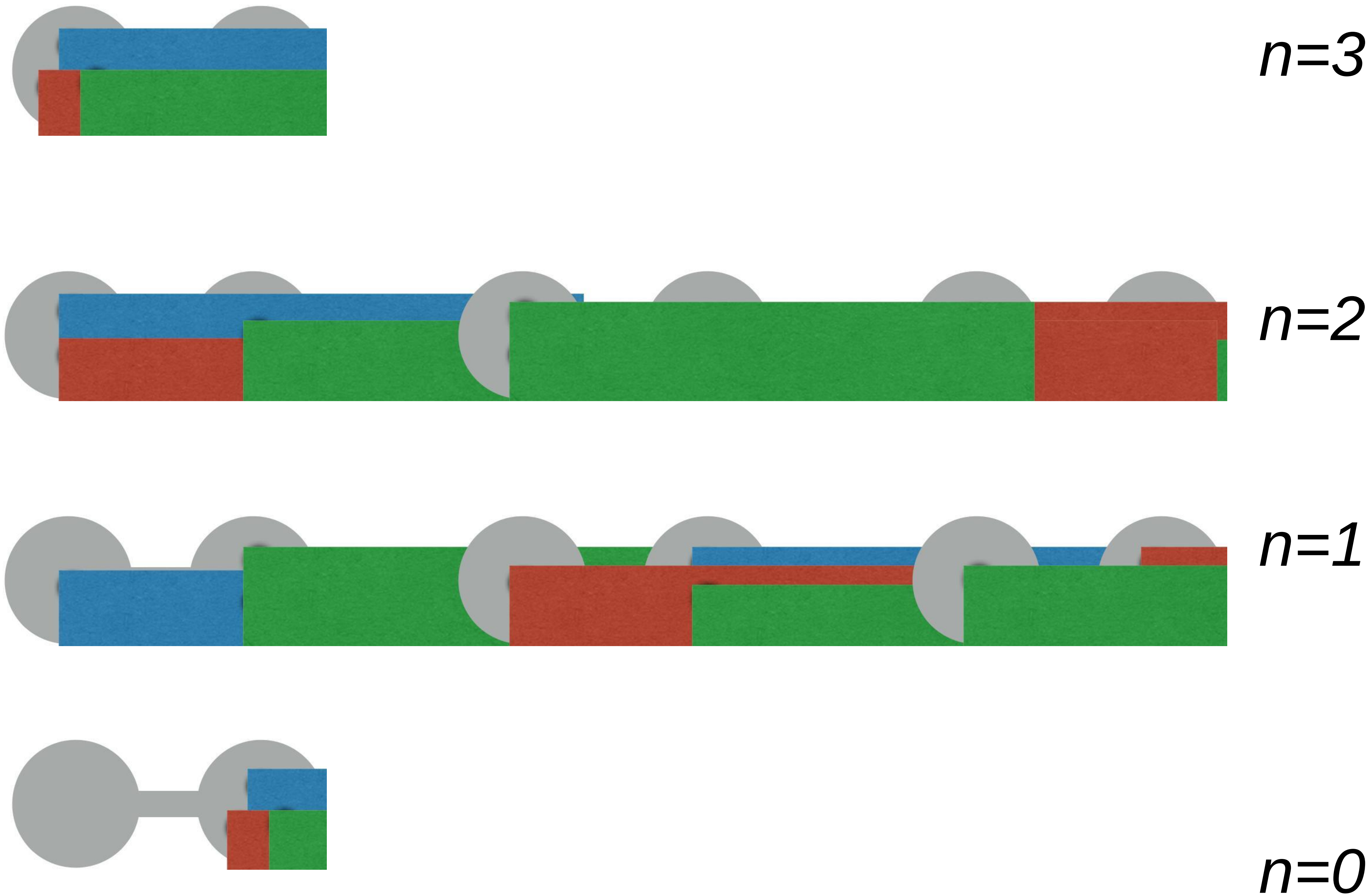
500 particules, 10 000 mesures

Plus il y a de particules, plus la probabilité d'un équilibre entre les deux récipients augmente



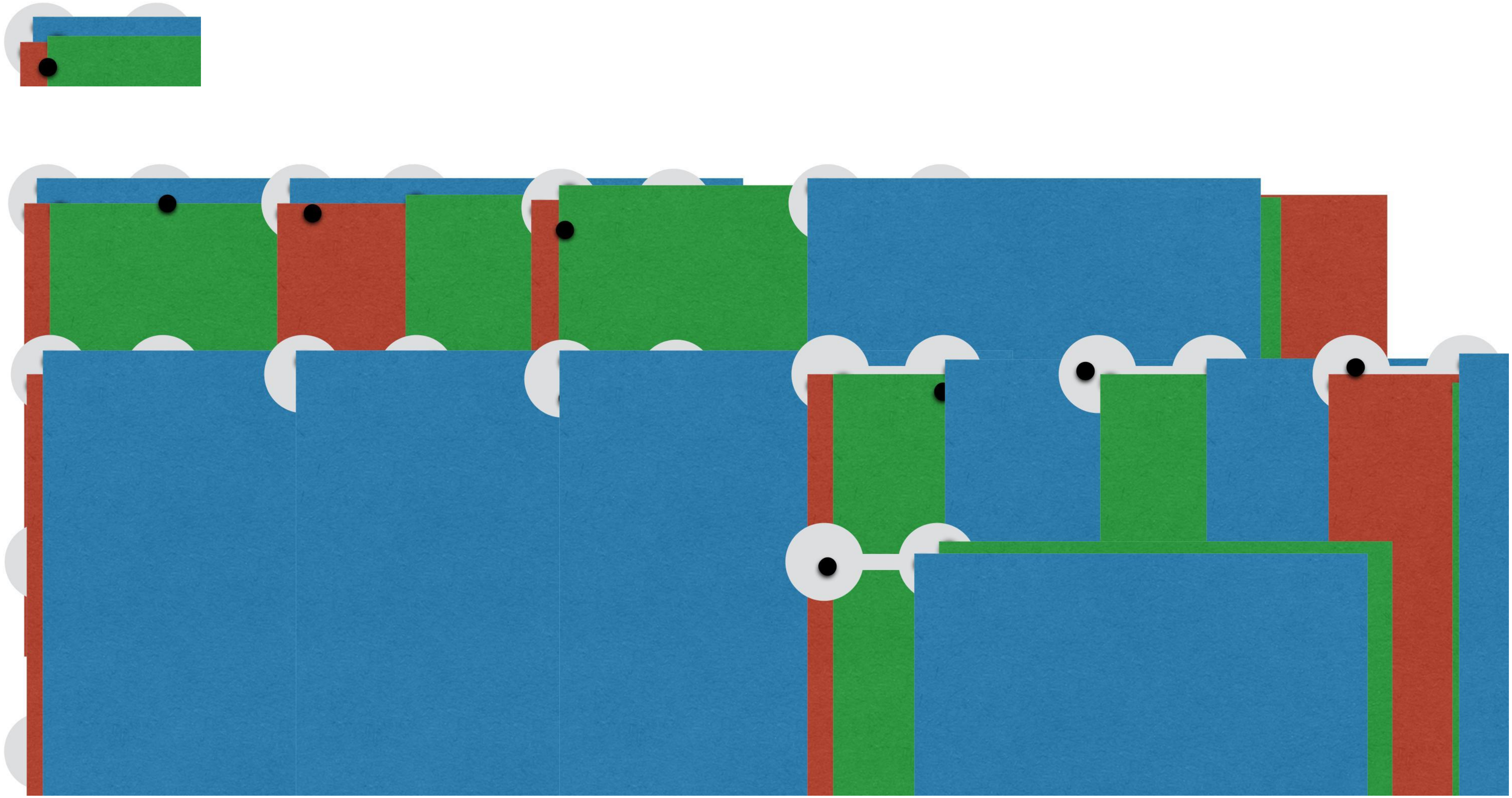
4 configurations microscopiques, 3 configurations macroscopiques

Plus il y a de particules, plus la probabilité d’un équilibre entre les deux récipients augmente



8 configurations microscopiques, 4 configurations macroscopiques

Plus il y a de particules, plus la probabilité d'un équilibre entre les deux récipients augmente



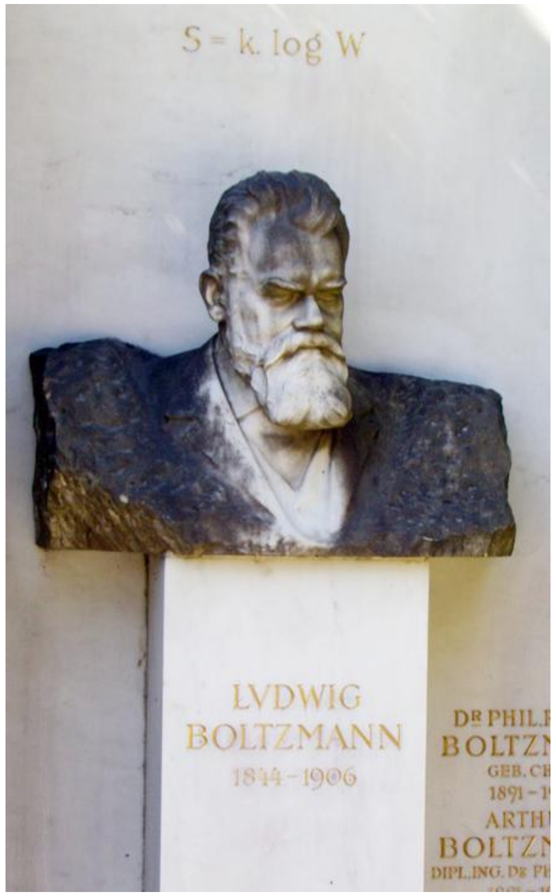
16 configurations microscopiques, 5 configurations macroscopiques

Plus il y a de particules, plus la probabilité d'un équilibre entre les deux récipients augmente

Pour N particules, il y a 2^N configurations microscopiques et $N+1$ configurations macroscopiques. *Certaines configurations macroscopiques regrouperont donc beaucoup de configurations microscopiques.*

Plus il y a de particules, plus la probabilité d'un équilibre entre les deux récipients augmente

Pour N particules, il y a 2^N configurations microscopiques et $N+1$ configurations macroscopiques. *Certaines configurations macroscopiques regrouperont donc beaucoup de configurations microscopiques.*



$S = k \log W$

Plus il y a de particules, plus la probabilité d'un équilibre entre les deux récipients augmente

Pour *N* particules, il y a 2^N configurations microscopiques et *N+1* configurations macroscopiques. *Certaines configurations macroscopiques regrouperont donc beaucoup de configurations microscopiques.*

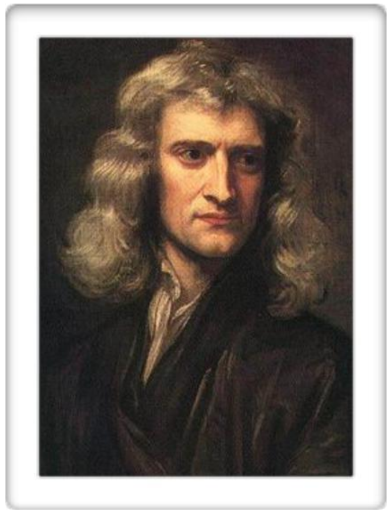
Les particules reprendront la configuration initiale, de manière presque sûre, en un temps de l'ordre de 2^N … soit un nombre à 10^{22} chiffres si *N* est de l'ordre du nombre d'Avogadro 10^{23}.

Comment concilier ces deux descriptions ?

«Le Livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua.»

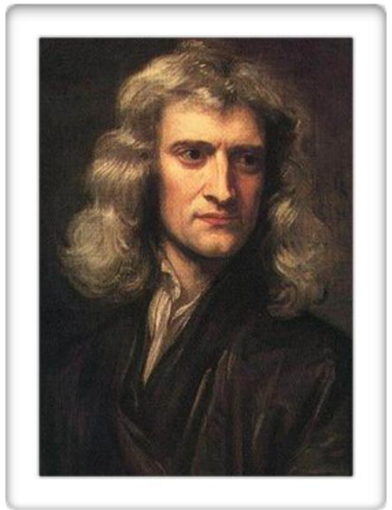
Hilbert, 2ème congrès international des mathématiciens, Paris 1900.

Étude du mouvement des fluides : bref historique



Dans *Principia mathematica* (1687), Isaac **Newton** pose les fondements de la **mécanique classique**, qui restera valable jusqu'en 1905 avec Einstein et la relativité restreinte.

Étude du mouvement des fluides : bref historique

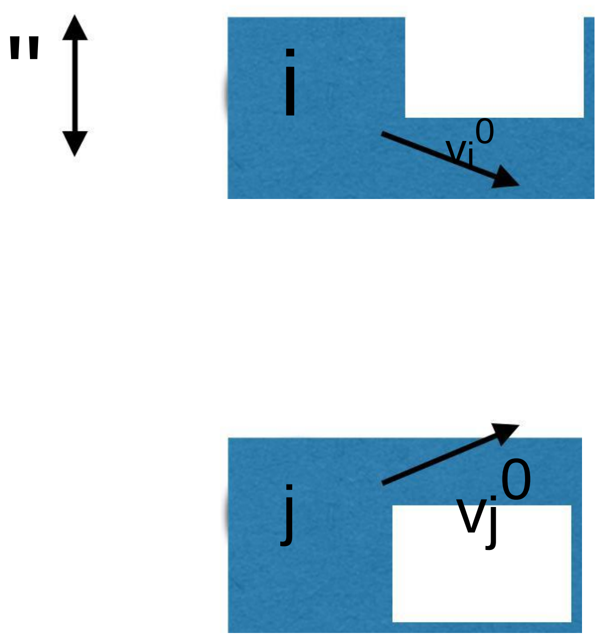


Dans *Principia mathematica* (1687), Isaac **Newton** pose les fondements de la **mécanique classique**, qui restera valable jusqu'en 1905 avec Einstein et la relativité restreinte.

Loi fondamentale de la dynamique : $F = ma$

Le modèle microscopique

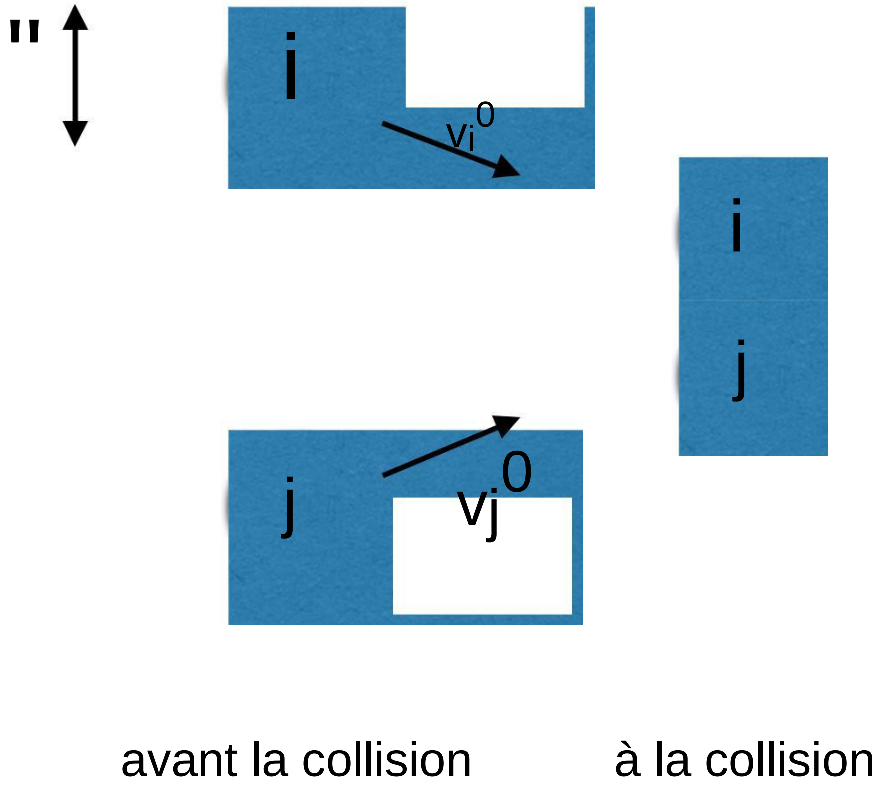
Un fluide est formé de molécules, qui obéissent aux lois de Newton :



avant la collision

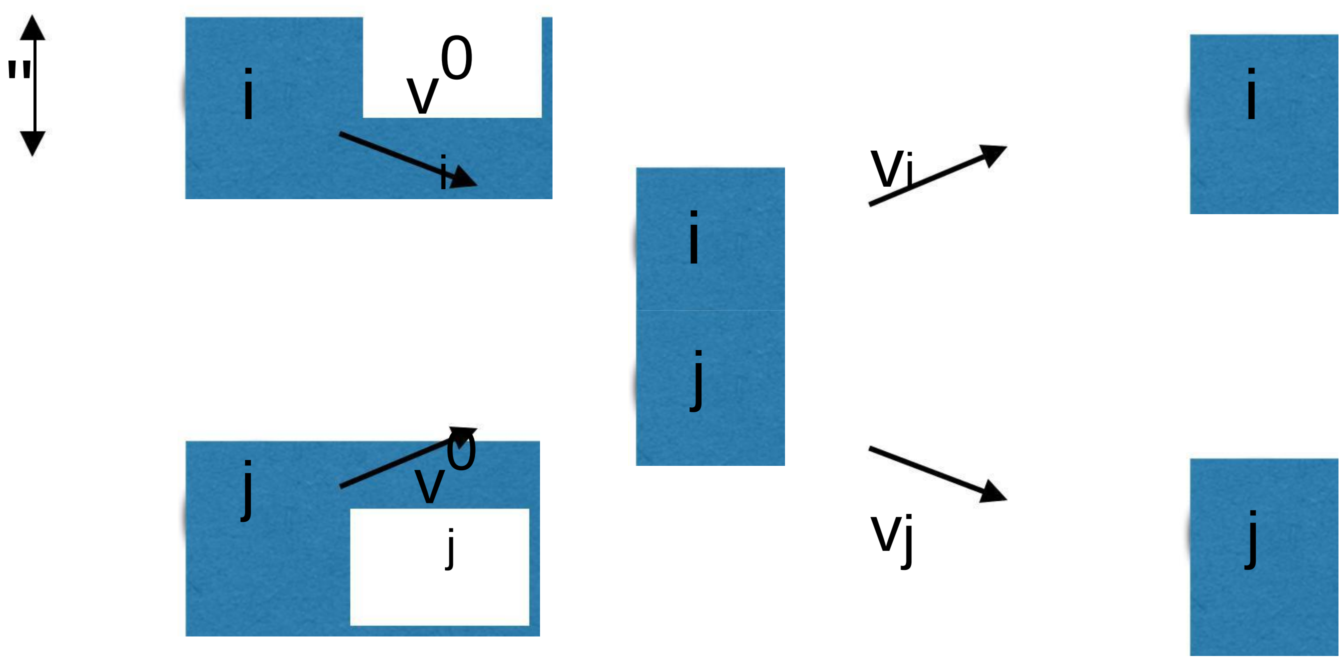
Le modèle microscopique

Un fluide est formé de molécules, qui obéissent aux lois de Newton :



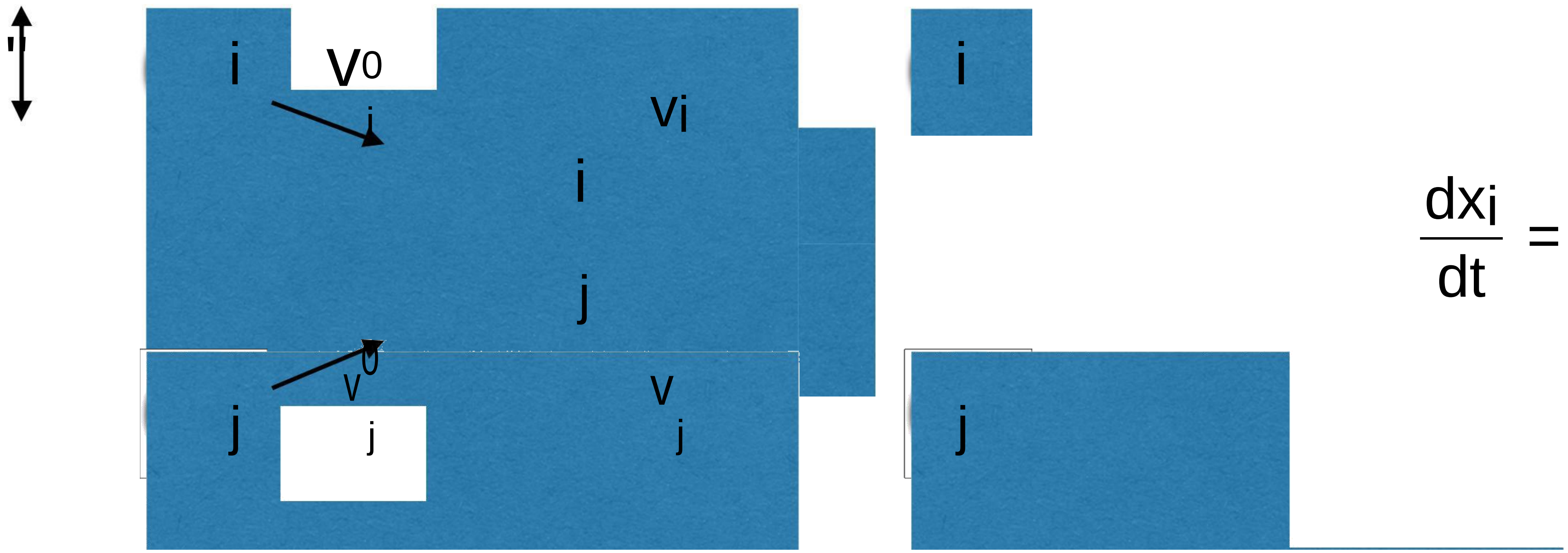
Le modèle microscopique

Un fluide est formé de molécules, qui obéissent aux lois de Newton :



avant la collision	à la collision	après la collision

Le modèle microscopique



avant la collision à la collision après la collision

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i\,, \qquad \frac{dv_i}{dt} = 0$$

$$v_i^0 := v_i - \frac{1}{\varepsilon^2}(v_i - v_j)\cdot(x_i - x_j)\,(x_i - x_j)$$

$$v_j^0 := v_j + \frac{1}{\varepsilon^2}(v_i - v_j)\cdot(x_i - x_j)\,(x_i - x_j)$$

On doit écrire *6N* équations !

Le modèle macroscopique

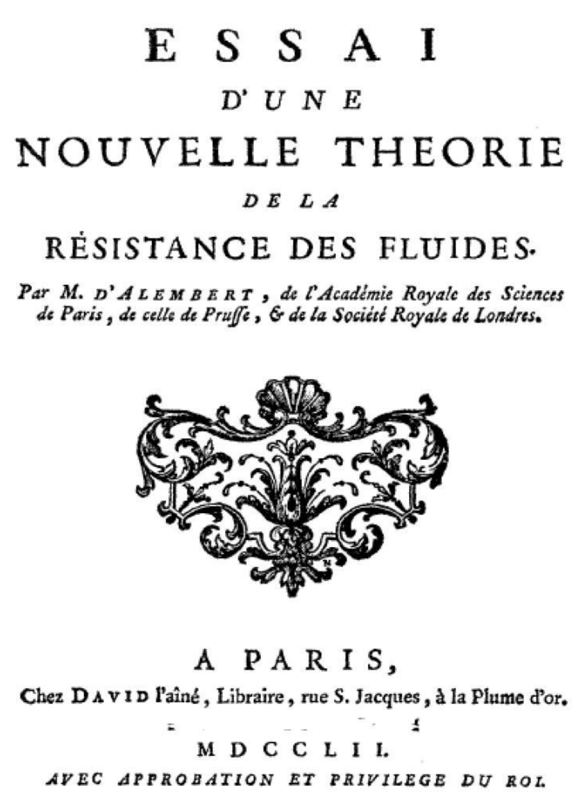
En 1748, l'Académie des sciences de Berlin propose le **Prix de Mathématiques** pour l'année 1750 :

Déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide, tant par rapport à la figure et aux divers degrés de vitesse des corps qu'à la densité et aux divers degrés de compression du fluide.

Le modèle macroscopique

En 1748, l’Académie des sciences de Berlin propose le **Prix de Mathématiques** pour l’année 1750.

Jean **d’Alembert**, mathématicien et philosophe français, soumet le 25 novembre 1749 un manuscrit de 137 pages qui propose une nouvelle vision de l’hydrodynamique.

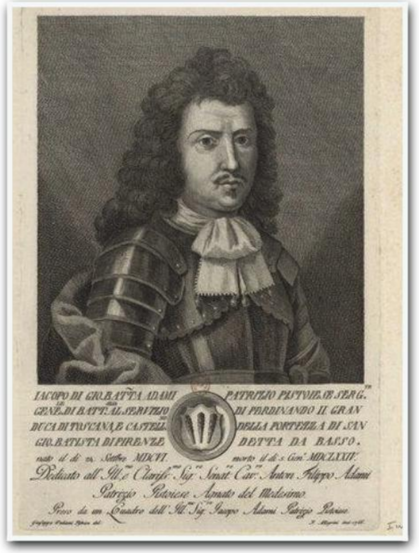

ESSAI
D'UNE
NOUVELLE THEORIE
DE LA
RÉSISTANCE DES FLUIDES.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS,
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.
MDCCLII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Le modèle macroscopique

En 1748, l'Académie des sciences de Berlin propose le **Prix de Mathématiques** pour l'année 1750.

Jean **d'Alembert**, mathématicien et philosophe français, soumet le 25 novembre 1749 un manuscrit de 137 pages qui propose une nouvelle vision de l'hydrodynamique.



L'Académie lui refuse le prix, qui est attribué à un protégé d'Euler, Jacques Adami (dont le manuscrit a aujourd'hui disparu).

Euler, Navier et Stokes

- **Les équations d'Euler**

Mathématicien suisse. Il établit ces équations en 1755, pour un fluide parfait.

Euler, Navier et Stokes

- **Les équations d'Euler**

Mathématicien suisse. Il établit ces équations en 1755, pour un fluide parfait.

- **Le paradoxe de d'Alembert**

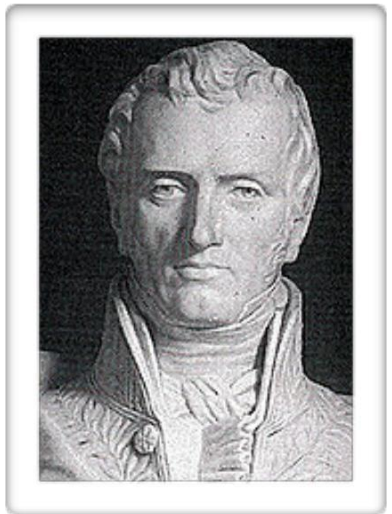
Euler, Navier et Stokes

- **Les équations d'Euler**

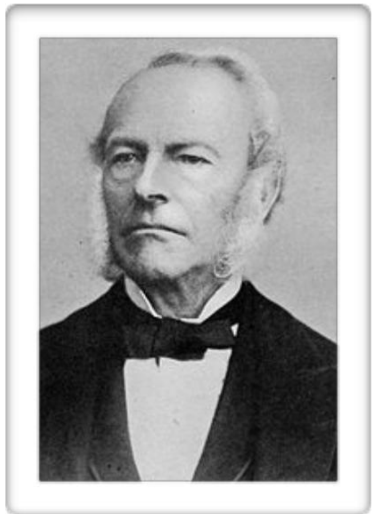
Mathématicien suisse. Il établit ces équations en 1755, pour un fluide parfait.

- **Le paradoxe de d'Alembert**

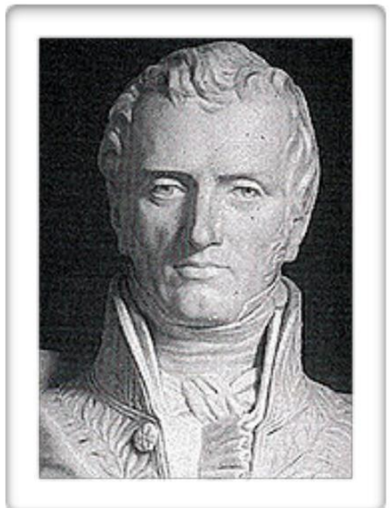
- **Les équations de Navier-Stokes**



Mathématiciens français et irlandais. Ils établissent ces équations pour un fluide visqueux en 1820-1845 (mais aussi **Saint-Venant**).

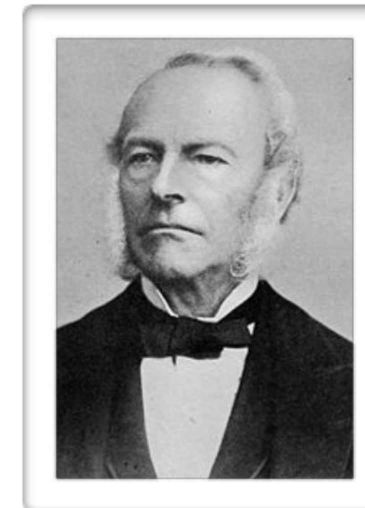


Les équations de Navier-Stokes



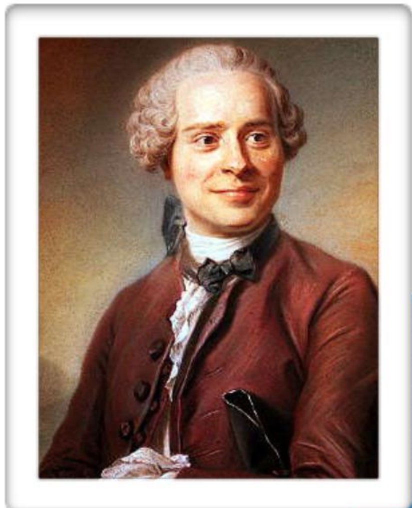
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = g - \nabla p$$

$$\nabla \cdot u = 0$$



Il s’agit d’un **système d’équations aux dérivées partielles**.

Les équations de Navier-Stokes



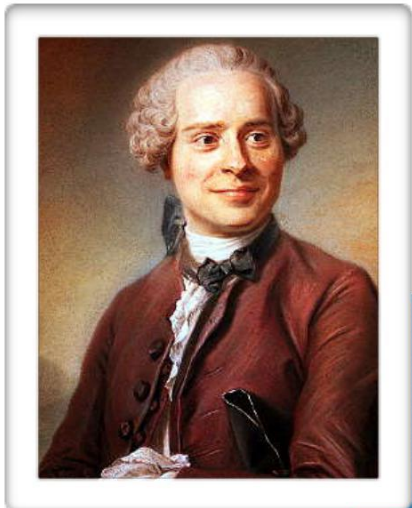
ˆ

ˆt + u · Ò u

accélération

Il s’agit d’un **système d’équations aux dérivées partielles**.

Les équations de Navier-Stokes



$$\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla u \qquad = \boldsymbol{g}$$

accélération

gravité

Il s’agit d’un **système d’équations aux dérivées partielles**.

Les équations de Navier-Stokes

ˆ/ˆt + u · Ò u = g

Ò¸ · ˚˙u= 0˝

accélération

incompressibilité

gravité

Il s’agit d’un **système d’équations aux dérivées partielles**.

Les équations de Navier-Stokes

pression

ˆ — + u · Ò u = g ≠Òp
t

¸ ° ˙ ˝

Ò ¸ · ° ˙ u = 0˝

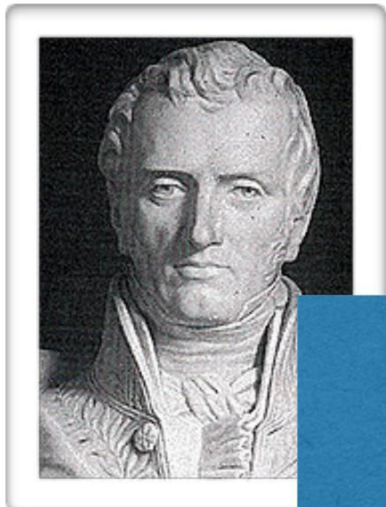
gravité

accélération

incompressibilité

Il s’agit d’un **système d’équations aux dérivées partielles**.

Les équations de Navier-Stokes



pression

ˆ ‸t + u · O u ≠ ‹ u = **g** ≠Op

Ò¸ · °˙u= 0˝

gravité

accélération

viscosité

incompressibilité

Il s’agit d’un **système d’équations aux dérivées partielles**.

Du microscopique au macroscopique : le mésoscopique et l'équation de Boltzmann

On cherche à caractériser l'état d'un gaz (constitué de particules indiscernables) par sa **fonction de distribution**

$$f\,(t, x\,,\,v\,) := \frac{\text{nombre de particules de position } x \text{ et de vitesse } v \text{ au temps } t}{\text{nombre total de particules}}\,.$$

Cette fonction ne se mesure pas, mais elle permet de **calculer des grandeurs mesurables** en faisant des moyennes.

Du microscopique au macroscopique : le mésoscopique et l'équation de Boltzmann

On cherche à caractériser l'état d'un gaz (constitué de particules indiscernables) par sa **fonction de distribution**

$$f\,(t, x\,,\,v\,) := \frac{\text{nombre de particules de position } x \text{ et de vitesse } v \text{ au temps } t}{\text{nombre total de particules}}\,.$$

Cette fonction ne se mesure pas, mais elle permet de **calculer des grandeurs mesurables** en faisant des moyennes.

Par exemple, la **vitesse du fluide** se calcule en moyennant $v \times f$.

L'équation de Boltzmann

Cette fonction vérifie l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

$$Q(f, f)(v) := \int_{S^{d-1}\times\mathbb{R}^d} [f(v')f(v_1') - f(v)f(v_1)]\, |(v - v_1) \cdot \sigma|\, dv_1 d\sigma$$

$$v' = v - \sigma \cdot (v - v_1)\, \sigma, \qquad v_1' = v_1 + \sigma \cdot (v - v_1)\, \sigma.$$

L'équation de Boltzmann

Cette fonction vérifie l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f) \,,$$

$$Q(f, f)(v) := \iint_{S^{d-1} \times \mathbb{R}^d} [f(v')f(v_1') - f(v)f(v_1)] \, |(v - v_1) \cdot \omega| \, dv_1 d\omega$$

$$v' = v - \omega \cdot (v - v_1) \, \omega \,, \qquad v_1' = v_1 + \omega \cdot (v - v_1) \, \omega \,.$$

Elle a été obtenue par Ludwig Boltzmann en 1872.

L’équation de Boltzmann

Cette fonction vérifie l’équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

$$Q(f, f)(v) := \iint_{S^{d-1} \times \mathbb{R}^d} [f(v')f(v_1') - f(v)f(v_1)]\, |(v - v_1) \cdot \sigma|\, dv_1 d\sigma$$

$$v' = v - \sigma \cdot (v - v_1)\, \sigma, \qquad v_1' = v_1 + \sigma \cdot (v - v_1)\, \sigma.$$

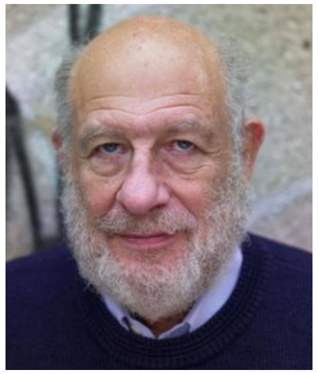
Elle a été obtenue par Ludwig Boltzmann en 1872. Elle lui a valu beaucoup de critiques…

L’équation de Boltzmann

- Elle est **irréversible**, alors que la dynamique des particules est **réversible** (paradoxe de Loschmidt, 1876). Elle repose sur la **propagation du chaos**.

L’équation de Boltzmann

- Elle est **irréversible**, alors que la dynamique des particules est **réversible** (paradoxe de Loschmidt, 1876). Elle repose sur la **propagation du chaos**.
- On peut néanmoins démontrer que les équations de la mécanique des fluides sont une limite de l’équation de Boltzmann.



Claude Bardos

François Golse

Dave Levermore

Laure Saint Raymond

L’équation de Boltzmann

- Elle est **irréversible**, alors que la dynamique des particules est **réversible** (paradoxe de Loschmidt, 1876). Elle repose sur la **propagation du chaos**.
- On peut néanmoins démontrer que les équations de la mécanique des fluides sont une limite de l’équation de Boltzmann.
- La question est alors de justifier l’équation de Boltzmann, et ainsi de ***justifier l’apparition de l’irréversibilité dans un système physique***.

Validité de l’équation de Boltzmann

Lanford, 1974

*Sous une hypothèse de **chaos** initial, les particules constituant un gaz raréfié deviennent indépendantes dans la limite où leur nombre tend vers l’infini. Leur densité obéit alors à l’équation de Boltzmann.*

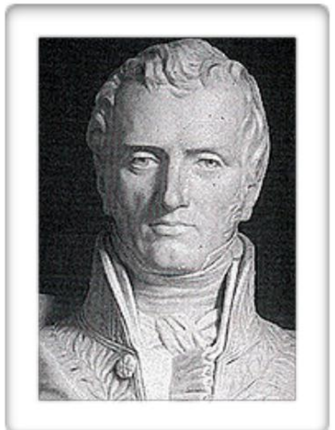
Validité de l'équation de Boltzmann

Lanford, 1974

Sous une hypothèse de ***chaos*** *initial, les particules constituant un gaz raréfié deviennent indépendantes dans la limite où leur nombre tend vers l'infini. Leur densité obéit alors à l'équation de Boltzmann.*

La démonstration complète de ce résultat a pris plusieurs années, avec des contributions importantes en 1994, 1998, et la touche finale en 2014 ! Malheureusement ce résultat est encore très incomplet, notamment il n'est valable que sur un **temps très court** et donc ne permet pas de déduire les équations de la mécanique des fluides.

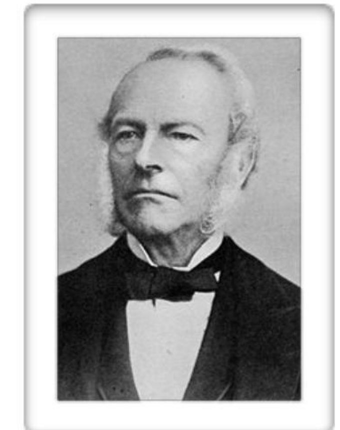
Les équations de Navier-Stokes



1820

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = g - \nabla p$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

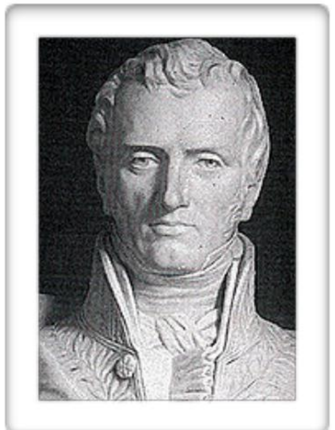


1845

Ces équations, et des variantes, sont utilisées encore aujourd'hui pour modéliser de nombreux écoulements.

Leur résolution reste un problème essentiellement *ouvert.*

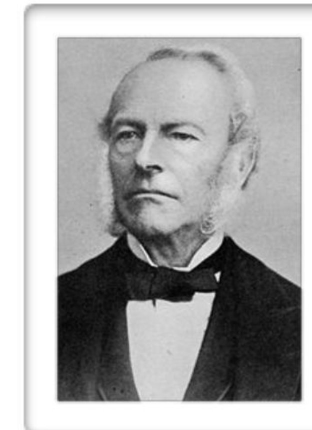
Les équations de Navier-Stokes



1820

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = g - \nabla p$$

$$\nabla \cdot u = 0$$



1845

Ces équations, et des variantes, sont utilisées encore aujourd'hui pour modéliser de nombreux écoulements.

1,000,000 $

Leur résolution reste un problème essentiellement *ouvert.*

Étude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du 19ème siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules **explicites** donnant une fonction solution des équations considérées.

Étude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du 19ème siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules **explicites** donnant une fonction solution des équations considérées.

- On s’est rapidement aperçu de la difficulté d’obtenir des solutions analytiques **exactes**.

Étude mathématique et difficultés

- Les chercheurs du 19ème siècle ont commencé par chercher à obtenir des **solutions analytiques** aux équations : des formules **explicites** donnant une fonction solution des équations considérées.

- On s'est rapidement aperçu de la difficulté d'obtenir des solutions analytiques **exactes**.

- On a construit des méthodes générales de **résolution d'équations aux dérivées partielles**.

Résolution d'une EDP : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité).

Résolution d'une EDP : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité).
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions.

Résolution d’une EDP : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité).
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions.
- Donner un **cadre** d’étude valable pour de nombreuses équations « du même type ».

Résolution d'une EDP : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité).
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions.
- Donner un **cadre** d'étude valable pour de nombreuses équations « du même type ».
- En cas d'échec, tenter d'utiliser au mieux la **forme particulière** de l'équation.

Résolution d’une EDP : le point de vue du mathématicien

- Montrer que les équations sont **bien posées** (existence, unicité, stabilité).
- Donner des **propriétés qualitatives** sur les solutions.
- Donner un **cadre** d’étude valable pour de nombreuses équations « du même type ».
- En cas d’échec, tenter d’utiliser au mieux la **forme particulière** de l’équation.
- **Simplifier** les équations (par exemple en présence de petits ou de grands paramètres).

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$\frac{\hat{}}{t} + u \cdot Ò \; u_{¸°˙″} \; \langle \; u_{¸°˙″} = \boldsymbol{g} \neq \underline{Ò}p$$

$$Ò_{¸} \cdot °˙u = 0″$$

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = \cancel{g - \nabla p}$$

$$\nabla \cdot u = \mathbf{0}$$

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

ˆ

ˆt + u · Ò

u ≠‹ u = 0

¸ ˚ ˙ ˝ ˝

Ò¸ · ˚ ˙u= 0˝

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

ˆ

ˆt + u · Ò

u ≠‹ u = 0

˚· ″ ″

¸

Ò¸ · ˚·u= 0″

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$\partial_t + u \cdot \nabla \qquad u \neq \quad u \qquad = 0$$

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

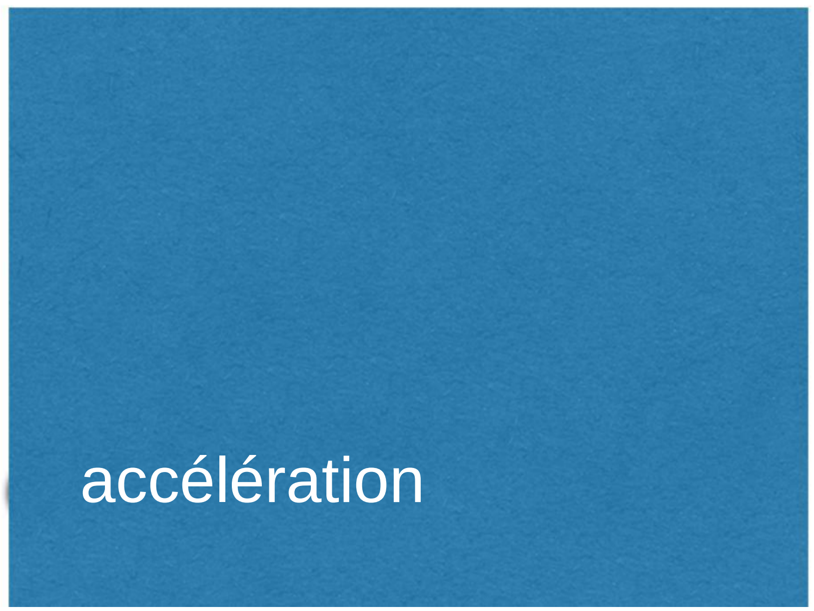
$u \neq u \quad = 0$

u est remplacé par une fonction d'une seule variable, t

Étude mathématique des équations:

des modèles simplifiés

$$a(t) \neq u^2(t) + u(t) = 0$$



Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$a(t) + u(t) = 0$$

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$a(t) + u(t) = 0$$

$$a(t) \neq u^2(t) = 0$$

Étude mathématique des équations:
des modèles simplifiés

$$a(t) + u(t) = 0$$

$$a(t) \neq u^2(t) = 0$$

$$a(t) \neq u^2(t) + u(t) = 0$$

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$a(t) + u(t) = 0$$

Étude mathématique des équations:
des modèles simplifiés

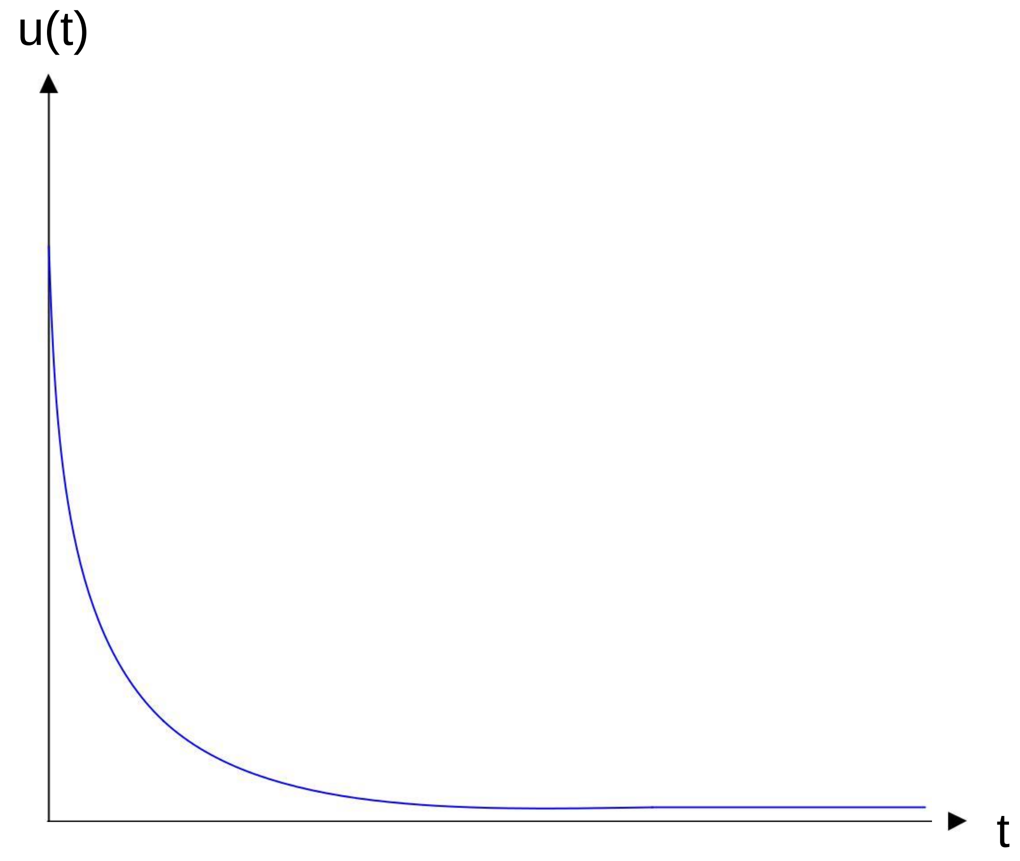
$$a(t) + u(t) = 0$$

Si la vitesse initiale est grande, alors la *décélération* est grande,

donc la vitesse diminue, donc la décélération diminue, etc.

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$a(t) + u(t) = 0$$



$$u(t) = u_0 e^{-t}$$

$$u(t = 0) = u_0$$

Solution globale qui tend vers zéro en temps grand.

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$a(t) \neq u^2(t) = 0$$

Étude mathématique des équations:
des modèles simplifiés

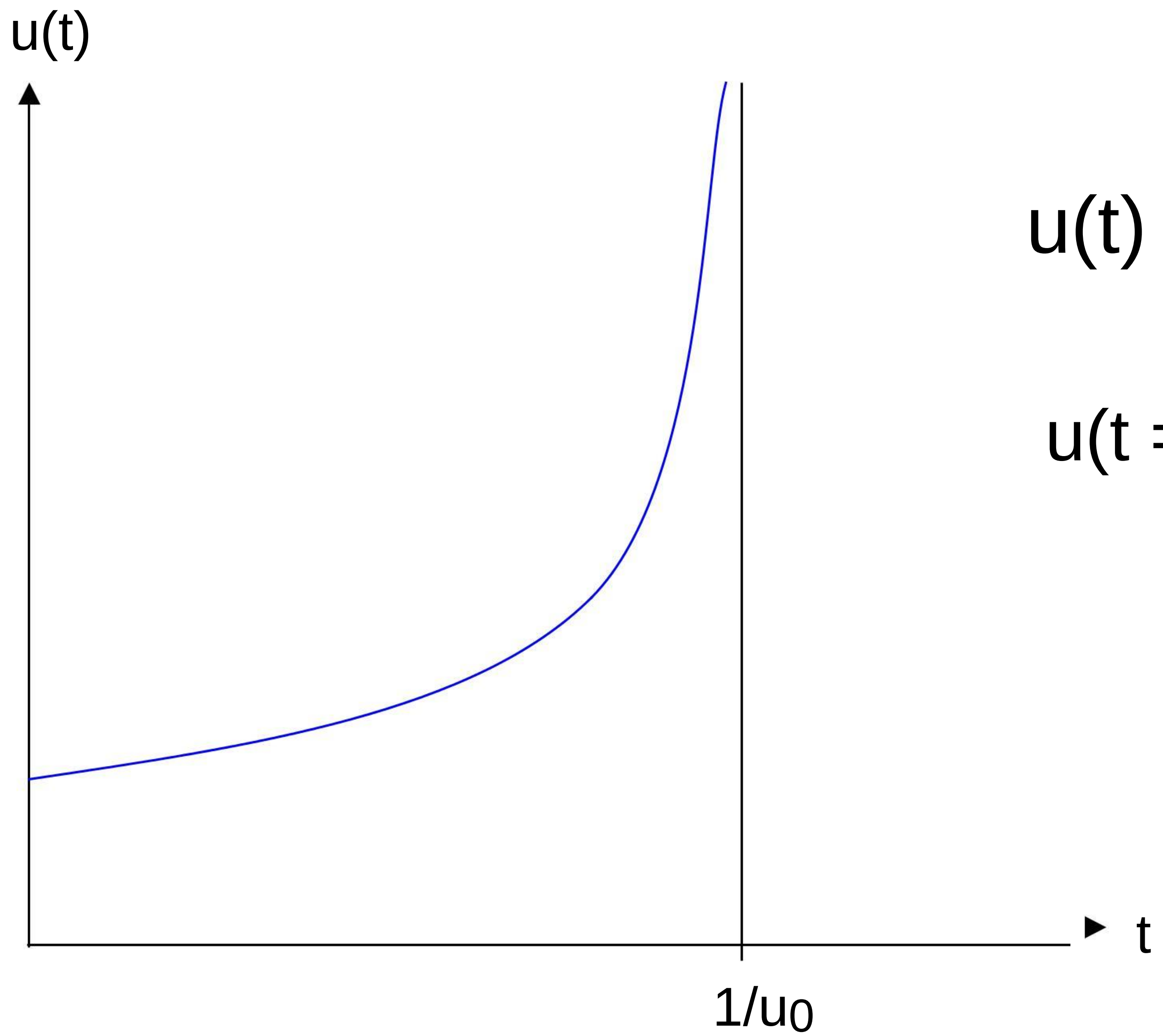
$$a(t) \neq u^2(t) = 0$$

Si la vitesse initiale est grande, alors *l'accélération* est grande, donc la vitesse augmente, donc l'accélération augmente, etc.

Étude mathématique des équations:

des modèles simplifiés

$$a(t) \neq u^2(t) = 0$$



$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t}$$

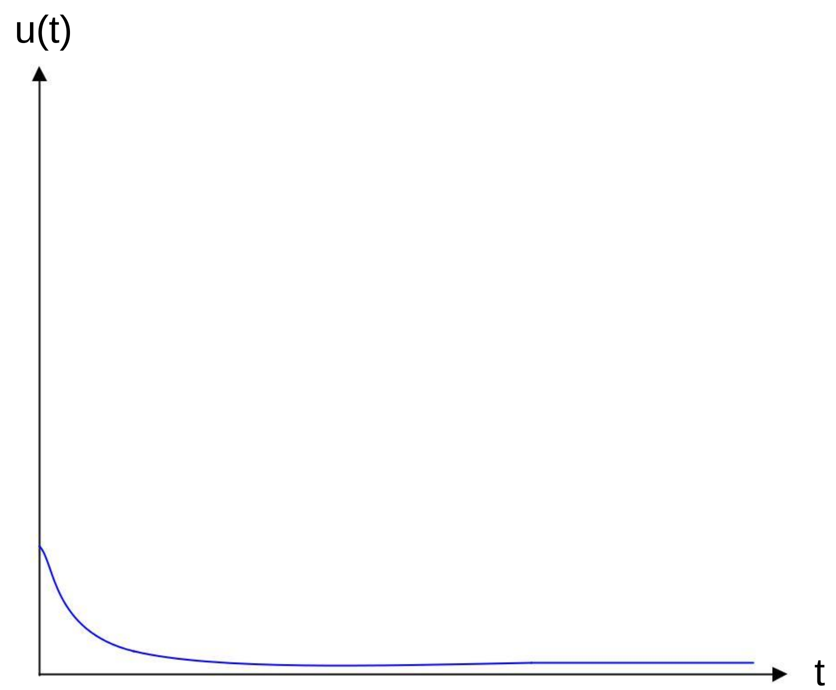
$$u(t = 0) = u_0$$

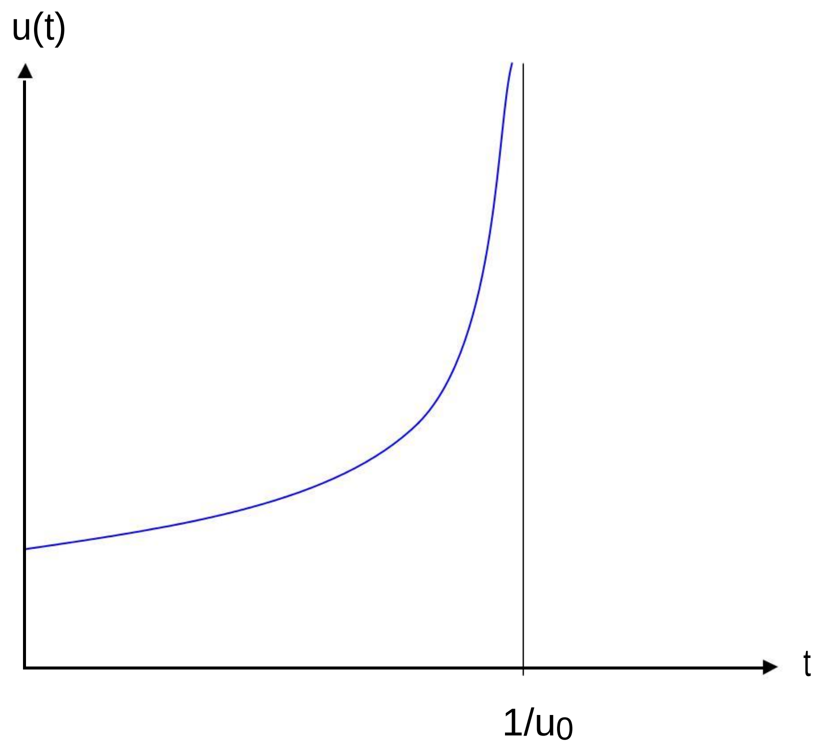
Explosion en temps fini : $T^* = 1/u_0$

Étude mathématique des équations: des modèles simplifiés

$$a(t) \neq u^2(t) + u(t) = 0$$

Conflit entre les deux premières situations : si u_0 est **petit** (par exemple si $u_0<1/2$) alors $u^2<u/2$ donc « le linéaire l'emporte ».
Sinon « le non linéaire l'emporte » et la solution peut exploser en temps fini.





Le problème de Cauchy

- Quelques résultats :

  Travaux mathématiques fondateurs de **Jean Leray** en 1934.

Le problème de Cauchy

- Quelques résultats sur Navier-Stokes :

  Travaux mathématiques fondateurs

  de **Jean Leray** en 1934.

Les recherches se poursuivent encore aujourd'hui : on peut citer

Fujita et Kato (1964), Cannone, Meyer et Planchon (1994), Koch et Tataru (2001).

Ces travaux consistent à chercher à obtenir la plus grande classe possible de données initiales garantissant l'existence et l'unicité de solutions.

Le problème de Cauchy

- Quelques résultats sur Navier-Stokes :

En général les solutions existent (et sont uniques) **en temps court**.

Le problème de Cauchy

- Quelques résultats sur Navier-Stokes :

En général les solutions existent (et sont uniques) **en temps court**.

L’existence globale n’est connue que pour de **petites données initiales**.

Le problème de Cauchy

- Quelques résultats sur Navier-Stokes :

En général les solutions existent (et sont uniques) **en temps court**.

L'existence globale n'est connue que pour de **petites données initiales**.

La conservation de l'énergie permet d'obtenir des solutions **globales**, mais **sans unicité**.

Le problème de Cauchy

- Quelques résultats sur Navier-Stokes :

En général les solutions existent (et sont uniques) **en temps court**.

L’existence globale n’est connue que pour de **petites données initiales**.

La conservation de l’énergie permet d’obtenir des solutions **globales**, mais **sans unicité**.

En **dimension deux**, les deux théories se rejoignent et on a existence et unicité globale de solutions.

Le problème de Cauchy

- Quelques résultats sur Boltzmann :

En général les solutions existent (et sont uniques) **en temps court**.

L'existence globale n'est connue que pour de **petites données initiales**.

La conservation de *l'entropie* permet d'obtenir des solutions **globales**, mais **sans unicité**.

Quelques questions ouvertes

Justifier les équations de Navier-Stokes à partir du système de particules. Pour le moment seuls des modèles linéaires simplifiés ont pu être obtenus.

Quelques questions ouvertes

Justifier les équations de Navier-Stokes à partir du système de particules. Pour le moment seuls des modèles linéaires simplifiés ont pu être obtenus.

La question à **$1,000,000** de la **Fondation Clay** est de savoir si pour une donnée initiale quelconque (aussi régulière que nécessaire, mais de taille arbitraire) il y a une **unique solution globale en temps**, ou si une **explosion en temps fini** peut avoir lieu pour certaines données initiales.

Quelques questions ouvertes

Justifier les équations de Navier-Stokes à partir du système de particules. Pour le moment seuls des modèles linéaires simplifiés ont pu être obtenus.

La question à **$1,000,000** de la **Fondation Clay** est de savoir si pour une donnée initiale quelconque (aussi régulière que nécessaire, mais de taille arbitraire) il y a une **unique solution globale en temps**, ou si une **explosion en temps fini** peut avoir lieu pour certaines données initiales.

Pour les applications géophysiques la rotation de la Terre joue un rôle stabilisateur (cf. l'intérêt de connaître la taille des paramètres physiques dans les équations).